Introduction aux Catégories Dérivées

Monica Garcia

Superviseur
Pierre-Guy Plamondon

Projet d'initiation à la Recherche (anciennement TER)
M1 Mathématiques Fondamentales voie Jacques Hadamard

Université Paris-Saclay, 2019
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques d'Orsay

Table des matières

Introduction

Les catégories dérivées ont étés introduites par A. Grothendieck et J-L. Verdier dans les années 60's, comme un outil très puissant dans la géométrie algébrique. Dès cet moment, elles sont devenues une des notions les plus étudiées en algèbre homologique. Elles ont aussi permis d'établir des liens entre la **théorie des représentations** et la géométrie algébrique. Par exemple, il se trouve que la catégorie dérivée associé au carquois de Kronecker est équivalente a celle des faisceaux cohérents de $\mathbb{P}^1$.

Le but de cet projet est servir comme une introduction à tout ce qui s'intéresse à ces sujets et qu'a les bases de théorie de catégories. Cet document est composé de 3 courts chapitres, dont le fil conducteur est la catégorie dérivée du carquois de Kronecker Q. Dans le premier chapitre, on fait un résumé des notion les plus importants de la théorie de représentations de carquois et on décrit tous les représentations indécomposables de Q. Dans le deuxième chapitre, on introduit la **catégorie homotopique** associée à Q, et on démontre qu'elle est triangulée. Finalement, dans le troisième chapitre, on présente la notion d'une catégorie localisé, et donc, celui de la **catégorie dérivée** de Q. On a inclut un annexe à propos des catégories abéliennes pour ceux qui ne sont pas habitués à ses propriétés.

Chapitre 1

Théorie des Représentations de Carquois

Dans ce chapitre on donne une introduction rapide aux concepts les plus importants de la théorie des représentations de carquois. On introduit les catégories $\mathrm{mod}(Q)$ et $\mathrm{rep}(Q)$ ainsi que des façons de les étudier.

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1. Un **carquois** $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ est un graphe dirigé où Q_0 est l'ensemble de sommets, Q_1 l'ensemble d'arètes arêtes et s et t sont des fonctions $Q_1 \longrightarrow Q_0$ telles que si $\alpha \in Q_1$ est une flèche alors $s(\alpha)$ est son point de départ et $t(\alpha)$ son point d'arrivée :

$$s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$$

Remarque. On pourrait avoir que Q_0 ou Q_1 sont infinis, ici on va supposer que les deux ensembles sont finis, dans ce cas on dit que Q est *fini.*

Définition 1.2. Soit Q un carquois et $\Bbbk$ un corps algébriquement clos, une **représentation** de Q est la donnée de $V = (V_i, \phi_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ où les V_i sont des espaces vectoriels et ϕ_α est un application linaire $\phi_\alpha : V_{s(\alpha)} \longrightarrow V_{t(\alpha)}$. Un morphisme entre deux représentations $(V_i, \phi_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ et $(V'_i, \phi'_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ de Q est une collection d'applications linéaires $(f_i)_{i\in Q_0}$ telle que pour chaque $\alpha \in Q_1$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
V_{s(\alpha)} \arrow[r, "\phi_\alpha"] \arrow[d, "f_{s(\alpha)}"'] & V_{t(\alpha)} \arrow[d, "f_{t(\alpha)}"] \\
V'_{s(\alpha)} \arrow[r, "\phi'_\alpha"] & V'_{t(\alpha)}
\end{tikzcd}$$

On dit qu'une représentation V de Q est de dimension finie si pour chaque $i \in Q_0$ V_i est de dimension finie. On note $\mathrm{rep}(Q)$ la catégorie des représentations de dimension finie du carquois Q.

Exemple 1.1. [**Carquois de Kronecker**] Soit Q le carquois donné par le graphe

$$1 \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} 2$$

et V la représentation

$$\Bbbk \overset{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}{\underset{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\rightrightarrows}} \Bbbk^2$$

Cherchons les endomorphismes de V, soient $k \in \Bbbk$ et $K = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\Bbbk)$ tels que

$$\begin{tikzcd} \Bbbk \arrow[r, "\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}"] \arrow[d, "k"'] & \Bbbk^2 \arrow[d, "\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}"] \\ \Bbbk \arrow[r, "\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}"] & \Bbbk^2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Bbbk \arrow[r, "\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}"] \arrow[d, "k"'] & \Bbbk^2 \arrow[d, "\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}"] \\ \Bbbk \arrow[r, "\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}"] & \Bbbk^2 \end{tikzcd}$$

soient des diagrammes commutatifs. On doit avoir $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui implique $K = k \cdot Id_{2\times 2}$. Donc $\mathrm{End}(V)$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension 1.

Définition 1.3. Soit Q un carquois et $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ un sous-ensemble de Q_1 tel que $s(\alpha_{i+1}) = t(\alpha_i)$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$, on note par $\rho = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ le **chemin** sur Q qui suit les flèches α_i. On pose $s(\rho) = s(\alpha_1)$ et $t(\rho) = t(\alpha_n)$. Pour chaque $i \in Q_0$, on considère aussi le chemin constant e_i, on a dans ce cas que $s(e_i) = i = t(e_i)$.

Remarque. Soit $V = (V_i, \phi_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ une représentation de Q, chaque chemin $\rho = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ définit une application linéaire entre $V_{s(\rho)}$ et $V_{t(\rho)}$ donnée par $\phi_\rho = \phi_{\alpha_n} \circ \cdots \circ \phi_{\alpha_1}$.

Soit $\Bbbk$ un corps algébriquement clos, on définit $\Bbbk Q$ comme le $\Bbbk-$espace vectoriel qui a comme base l'ensemble de chemins sur Q, c'est-à-dire

$$\Bbbk Q = \bigoplus_{\rho \text{ chemin}} \Bbbk\rho$$

. Les éléments de $\Bbbk Q$ sont des sommes *finies* de la forme $\sum_i k_i\rho_i$, où $k_i \in \Bbbk$ et ρ_i est un chemin. Soient $\rho = \alpha_1\alpha_2...\alpha_n$ et $\rho' = \alpha'_1\alpha'_2...\alpha'_n$ deux chemins, on définit la concaténation de ρ et ρ' comme

$$\rho\rho' = \begin{cases} \alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha'_1\alpha'_2...\alpha'_n & \text{si } s(\rho') = t(\rho) \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$$

Pour $\sum_i k_i \rho_i \in \Bbbk Q$ on pose $\left(\sum_i k_i \rho_i\right) \rho = \sum_i k_i \rho_i \rho$ et $\rho \left(\sum_i k_i \rho_i\right) = \sum_i k_i \rho \rho_i$. On a alors une opération bilinéaire compatible avec la structure d'espace vectoriel de $\Bbbk Q$.

Proposition 1.1. *L'espace vectoriel $\Bbbk Q$ muni de la concaténation de chemins est une $\Bbbk$-algèbre.*

□

Définition 1.4. On dit que $\Bbbk Q$ est **l'algèbre de chemins** sur Q

Remarque. Si Q est fini, l'algèbre $\Bbbk Q$ possède une unité : en effet, considérons $1 = \sum_{i \in Q_0} e_i \in \Bbbk Q$, alors il est facile de voir que pour tout élément $x \in \Bbbk Q$ on a $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$. En particulier, on a que $\Bbbk \subset \Bbbk Q$.

Exemple 1.2. Considérons à nouveau le carquois Q introduit dans l'exemple 1.1. On sait que $\Bbbk Q$ est un $\Bbbk$-espace vectoriel de dimension 4 car les seuls chemins sur Q sont e_1, e_2, α et β. En fait, l'algèbre définie par Q est isomorphe à l'espace de matrices

$K = \begin{pmatrix} \Bbbk & \Bbbk^2 \\ 0 & \Bbbk \end{pmatrix}$ via l'isomorphisme $\phi : \Bbbk Q \to K$ tel que

$$\phi(e_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \phi(\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & (1,0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & (0,1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que ϕ est un morphisme qui transforme la concaténation de chemins en multiplication de matrices. Notons en plus qu'un élément $k_1 e_1 + k_2 e_2 + k_\alpha \alpha + k_\beta \beta \in \Bbbk Q$ correspond à la matrice $\begin{pmatrix} k_1 & (k_\alpha, k_\beta) \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$.

En particulier, $\Bbbk Q$ a une structure d'anneau, donc on a intérêt à étudier les **modules** à droite sur $\Bbbk Q$. On note par $\mathrm{mod}(Q)$ la catégorie de modules à droite de type fini. Le théorème suivant donne la relation entre les représentations de dimension finie de Q et les modules de type fini sur $\Bbbk Q$:

Théorème 1.1. *Soit Q un carquois fini et soit $\Bbbk$ un corps algébriquement clos. On a une équivalence de catégories entre* $\mathrm{mod}(Q)$ *et* $\mathrm{rep}(Q)$.

Démonstration. On va construire deux foncteurs $F : \mathrm{mod}(Q) \longrightarrow \mathrm{rep}(Q)$ et $G : \mathrm{rep}(Q) \longrightarrow \mathrm{mod}(Q)$ tels que $FG \cong \mathrm{Id}_{\mathrm{mod}(Q)}$ et $GF \cong \mathrm{Id}_{\mathrm{rep}(Q)}$. Cependant le fait que F et G sont bien des foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre est démontré dans [5, Théorème 5.4]. Commençons par F, soit $M \in \mathrm{mod}(Q)$, on pose $V_i = M \cdot e_i = \{ m e_i \mid m \in M\}$ qui hérite d'une structure de $\Bbbk$-espace vectoriel de celle de $\Bbbk Q$-module de M et du fait que $\Bbbk \subset \Bbbk Q$. De plus, M est de type fini, donc il existe $m_1, \ldots m_r \in M$ tels que $M = m_1 \Bbbk Q + \cdots + m_r \Bbbk Q$ et comme Q est fini et sans cycles orientés, il n'y a qu'un nombre fini de chemins sur Q. Cela implique que

$$M = \sum_{j=1}^{r} \sum_{\text{chemins de Q}} m_j \rho \, \Bbbk$$

En particulier, chaque V_i est un espace vectoriel de dimension finie. Soit maintenant $\alpha \in Q_1$ tel que $s(\alpha) = i$ et $t(\alpha) = j$, on définit $\phi_\alpha : V_i \to V_j$

$$\phi_\alpha(m e_i) = m e_i \alpha = (m e_i \alpha) e_j \in V_j$$

On définit $F(M) = (V_i, \phi_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$. Soit maintenant $f : M \to M'$ un morphisme de $\Bbbk Q$, pour chaque $i \in Q_0$ on a que f se restreint en une application linéaire $f_i : Me_i \to M'e_i$ car pour $m \in M$ on a $f(me_i) = f(m)e_i$. On pose $F(f) = (f_i)_{i\in Q_0}$.

Par ailleurs, soit $V = (V_i, \phi_\alpha)_{i\in Q_0,\alpha\in Q_1}$ une représentation de dimension fini de Q, posons $M = \bigoplus_{i\in Q_0} V_i$ et pour chaque chemin ρ de Q et $m = \sum_{i\in Q_0} m_i \in M$,

$$m \cdot \rho = \rho\left(m_{s(\rho)}\right).$$

En étendant cette opération à $\Bbbk Q$ on obtient une structure de $\Bbbk Q$-module à droite de sur M et on pose $G(V) = M$. Finalement, pour $f = (f_i)_{i\in Q_0}$ un morphisme de représentations V et V' de Q on définit $G(f)$ par

$$\begin{aligned} G(V) &\longrightarrow G(V') \\ \sum_{i\in Q_0} m_i &\longmapsto \sum_{i\in Q_0} f_i(m_i) \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 1.3. Considérons à nouveau le carquois de Kronecker Q de l'exemple 1.1. Posons $P_1 = e_1(\Bbbk Q) = e_1\Bbbk \oplus \alpha\Bbbk \oplus \beta\Bbbk$ le $\Bbbk Q$-module à droite de type fini dont les éléments sont de la forme $e_1 \cdot m$ avec $m \in \Bbbk Q$. En utilisant la notation du Théorème 1.1, on a

$$V_1 = P_1e_1 = e_1\Bbbk \simeq \Bbbk, \qquad V_2 = P_1e_2 = \alpha\Bbbk \oplus \beta\Bbbk \simeq \Bbbk^2,$$
$$\phi_\alpha(e_1) = e_1\alpha = \alpha, \qquad \phi_\beta(e_1) = e_1\beta = \beta.$$

On a que $F(P_1) = V$, où V est la représentation de l'exemple 1.1.

1.2 Modules indécomposables et modules projectifs

Rappelons qu'une façon d'étudier la catégorie $\mathrm{mod}(Q)$ est de regarder ses modules indécomposables, projectifs et injectifs. Il se trouve que l'algèbre $\Bbbk Q$ a des propriétés qui facilitent la description de ces modules. Dans cette section, on suppose toujours que Q est fini et sans cycles orientés. On travaille toujours avec des modules à droite.

Définition 1.5. Soit $\mathcal{A}$ un anneau. Un $\mathcal{A}$-module M est **artinien** si pour tout suite de sous-modules de la forme $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots$, il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $M_i = M_j$ pour tout $j \geq i$. Dans ce cas, on dit que la suite est stationnaire. De la même façon, on dit que M est **noethérien** si toute suite de la forme $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots$ est stationnaire.

On a que $\Bbbk Q$ vue comme $\Bbbk Q$-module à droite est artinienne (resp. noethérienne). En effet, un sous-module de $\Bbbk Q$ est en particulier un sous-$\Bbbk$-espace vectoriel de l'espace vectoriel de dimension finie $\Bbbk Q$, et on sait qu'une suite décroissante (croissante) de sous-espaces vectoriels de dimension finie est stationnaire. Dans ce cas, on dit que $\Bbbk Q$ est artinienne (resp. noethérienne) à droite. Cette propriété est très puissante et va nous permettre de mieux décrire $\mathrm{mod}(Q)$. On a le théorème suivant :

Théorème 1.2. *Soit Q un carquois fini et sans cycles orientés et M un $\Bbbk Q$-module. Alors sont équivalents :*

— *M est artinien,*
— *M est noethérien,*
— *M est de type fini.*

Démonstration. On sait que $\Bbbk Q$ est une algèbre artinienne à droite et le résultat suit de [1][VII 4.12]. □

On a alors que tous les objets de $\mathrm{mod}(Q)$ sont des modules artiniens et noethériens. Il en résulte qu'on peut étudier $\mathrm{mod}(Q)$ en regardant quelques modules qui servent comme des "blocs" de construction pour tous les modules dans $\mathrm{mod}(Q)$. Il s'agit des modules indécomposables.

Définition 1.6. Soit $\mathcal{A}$ un anneau. Un $\mathcal{A}$-module M est dit **indécomposable** si $M \neq 0$ et si $M = M_1 \oplus M_2$ implique que $M_1 = 0$ ou $M_2 = 0$.

On a que si un module M est noethérien ou artinien, alors il se décompose en somme directe finie de modules indécomposables (voir [1][VII 6.1]). Cela entraîne que n'importe quel module dans $\mathrm{mod}(Q)$ se décompose en somme directe finie de $\Bbbk Q$-modules indécomposables. Il se trouve que grâce au fait que $\Bbbk Q$ est artinienne, cette décomposition est aussi unique. Regardons d'abord comment identifier les modules indécomposables de $\mathrm{mod}(Q)$.

Proposition 1.2. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau. Il existe une bijection entre décompositions d'un $\mathcal{A}$-module M en une somme directe finie et décompositions de l'identité dans $\mathrm{End}(M)$ en une somme d'idempotents orthogonaux. En particulier, M est indécomposable si et seulement si les seuls idempotents de $\mathrm{End}(M)$ sont le morphisme 0 et l'identité.*

Démonstration. Voir [1][VII 6.3 et 6.4]. □

Exemple 1.4. Soit Q un carquois fini avec n sommets, on a alors que $1_{\Bbbk Q} = \sum_{i=1}^{n} e_i$ où les e_i forment un ensemble d'idempotents orthogonaux. Rappelons que $\mathrm{End}(\Bbbk Q) \simeq \Bbbk Q$ car chaque $m \in \Bbbk Q$ induit un morphisme de $\Bbbk Q$-module donné par la multiplication à gauche. D'après la proposition 1.2 on a une décomposition en facteurs directs donné par

$$\Bbbk Q = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, e_i = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i(\Bbbk Q)$$

La proposition 1.2 dit que l'algèbre d'endomorphismes d'un module est un outil qui nous permettre savoir si un module est indécomposable.

Exemple 1.5. Considérons la représentation (module grâce au théorème 1.1) V dans l'exemple 1.1. On a vu que $\mathrm{End}(V) \simeq \Bbbk$, c'est-a-dire que l'algèbre d'endomorphismes est isomorphe à un corps et les seuls idempotents sont 0 et l'identité. La proposition 1.2 entraîne que V est indécomposable.

On rappelle qu'une algèbre est **locale** si elle n'a qu'un seul idéal à droite maximal. Cette condition est équivalente à ce que pour chaque élément x de l'algèbre, au moins un des éléments x ou $1-x$ est inversible. Dans l'exemple 1.5, comme $\Bbbk$ est un corps, les seuls idéaux sont $\{0\}$ et $\Bbbk$ et donc $\mathrm{End}(V) \simeq \Bbbk$ est locale. On a la proposition suivante :

Proposition 1.3. *Soit $\mathcal{A}$ un anneau et M un $\mathcal{A}$-module tel que* $\mathrm{End}(M)$ *soit local, alors M est indécomposable.*

Démonstration. Soit $e \in \mathrm{End}(M)$ un idempotent. Comme $\mathrm{End}(M)$ est locale, e ou $1-e$ est inversible. Si e est inversible, comme $e^2 = e$ on a que $e = 1_{\mathrm{End}(M)}$. Si $1-e$ est inversible, alors $e(1-e) = e - e^2 = 0$ implique que $e = 0$. $\square$

Il se trouve que la réciproque de la Proposition 1.3 est vraie pour tout module dans $\mathrm{mod}(Q)$, ce qui nous donne un bon critère pour déterminer si un module est indécomposable ou pas. (Voir 1.3).

Exemple 1.6. Considérons le carquois de Kronecker Q et les représentations suivantes :

$$V_1 := \quad 0 \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} \Bbbk \qquad V_2 := \quad \Bbbk \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} 0 \qquad V_3 := \quad \Bbbk^n \underset{J_n(\lambda)}{\overset{Id_{n\times n}}{\rightrightarrows}} \Bbbk^n \qquad V_4 := \quad \Bbbk^n \underset{J_n(\lambda)}{\overset{J_n(0)}{\rightrightarrows}} \Bbbk^n$$

$$V_5 := \quad \Bbbk^n \underset{\begin{pmatrix} Id_{n\times n} \\ 0 \end{pmatrix}}{\overset{\begin{pmatrix} 0 \\ Id_{n\times n} \end{pmatrix}}{\rightrightarrows}} \Bbbk^{n+1} \qquad V_6 := \quad \Bbbk^{n+1} \underset{(Id_{n\times n}\ ,\ 0)}{\overset{(0\ ,\ \mathrm{Id}_{n\times n})}{\rightrightarrows}} \Bbbk^n$$

où $\lambda \in \Bbbk$, $n \in \mathbb{N}_{>0}$ et $J_n(\lambda)$ es une matrice de Jordan. Clairement V_1 et V_2 sont indécomposables car $\Bbbk$ l'est. On voit facilement que $\mathrm{End}(V_1) = \{(0, r) \mid r \in \Bbbk\} \simeq \Bbbk$ et $\mathrm{End}(V_2) = \{(s, 0) \mid s \in \Bbbk\} \simeq \Bbbk$ qui sont des $\Bbbk$-algèbres locales.

On calcule $\mathrm{End}(V_3)$. Soit $(A, B) \in \mathrm{End}(V_3)$, on a $A, B \in M_{n\times n}(\Bbbk)$. On doit avoir

$$B \cdot Id_{n\times n} = Id_{n\times n} \cdot A$$

$$B \cdot J_n(\lambda) = J_n(\lambda) \cdot A$$

Cela implique que $A = B$ et $A \cdot J_n(\lambda) = J_n(\lambda) \cdot A$. Si $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$, on a la relation $(\lambda a_{ij} + a_{ij-1}) = (\lambda a_{ij} + a_{i+1j})$ pour tout $0 \le i, j \le n$ où $a_{i0} = a_{n+1j} = 0$. On a que $a_{i+1j} = a_{ij-1}$ pour tout i, j, en particulier $a_{i1} = a_{nj} = 0$ pour tout $2 \le i \le n$ et $1 \le j \le n-1$, ce qui entraîne que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}$$

On en obtient que $\mathrm{End}(V_3) \simeq \Bbbk[X]/(X^n)$, qui est une algèbre locale.

On étudie maintenant $\mathrm{End}(V_4)$, ici on doit supposer $\lambda \neq 0$. Prenons $(A, B) \in \mathrm{End}(V_4)$ et supposons $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n}$. Comme $(A, B) \in \mathrm{End}(V_4)$ on a

$$B \cdot J_n(0) = J_n(0) \cdot A,$$

$$B \cdot J_n(\lambda) = J_n(\lambda) \cdot A.$$

Ce qui entraîne

$$\begin{pmatrix} 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n-1} \\ 0 & b_{21} & \cdots & b_{2n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n1} & \cdots & b_{nn-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $b_{ij} = a_{i+1j+1}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n-1$ et $b_{nj} = a_{i1} = 0$ pour $1 \leq j \leq n-1$ et $2 \leq i \leq n$. On a aussi que $\lambda b_{ij} + b_{ij-1} = \lambda a_{ij} + a_{i+1j}$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ où $b_{i0} = a_{n+1j} = 0$. Cela implique que

$$\begin{aligned} \lambda a_{i+12} = \lambda b_{i1} = \lambda a_{i1} + a_{i+11} &= \lambda a_{i1} \text{ pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ \lambda a_{i+1j+1} + a_{i+1j} = \lambda b_{ij} + b_{ij-1} = \lambda a_{ij} + a_{i+1j} &\text{ pour } 2 \leq j \leq n-1 \text{ et } 1 \leq i \leq n-1, \\ \lambda b_{in} + a_{i+1n} = \lambda b_{in} + b_{in-1} = \lambda a_{in} + a_{i+1n} &\text{ pour } 1 \leq i \leq n-1, \\ 0 = \lambda b_{nj} + b_{nj-1} = \lambda a_{nj} &\text{ pour } 1 \leq j \leq n-1, \\ \lambda b_{nn} &= \lambda a_{nn}. \end{aligned}$$

Comme $\lambda \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} b_{in} &= a_{1n} \text{ pour tout } 1 \leq i, j \leq n, \\ a_{ij} &= a_{i+1j+1} \text{ pour tout } 1 \leq i, j \leq n-1, \\ a_{i1} &= a_{nj} = 0 \text{ pour tout } 2 \leq i \leq n \text{ et } 1 \leq j \leq n-1. \end{aligned}$$

Et on sait que $\mathrm{End}(V_4) \simeq \Bbbk[X]/(X^n)$. Soit maintenant $(A, B) \in \mathrm{End}(V_5)$, on a $A \in M_{n\times n}(\Bbbk)$, $B \in M_{n+1\times n+1}(\Bbbk)$ et

$$B \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ Id_{n\times n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Id_{n\times n} \end{pmatrix} \cdot A,$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} Id_{n\times n} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Id_{n\times n} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot A.$$

Comme avant on pose $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n+1}$, alors

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{ij} \text{ pour tout } 1 \leq i, j \leq n, \\ b_{ij} &= a_{i-1j-1} \text{ pour tout } 2 \leq i, j \leq n+1, \\ b_{n+1j} &= 0 \text{ pour tout } 1 \leq j \leq n, \\ b_{1j} &= 0 \text{ pour tout } 2 \leq j \leq n+1. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a_{i-1j-1} \text{ pour tout } 2 \leq i, j \leq n, \\ a_{1j} &= b1j = 0 \text{ pour tout } 2 \leq j \leq n, \\ a_{nj-1} &= b_{n+1j} = 0 \text{ pour tout } 2 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Ce qui implique que $a_{ij} = b_{ij} = 0$ pour tout $i \neq j$ et $a_{ii} = b_{ii} = k$ pour certain $k \in \Bbbk$. On a que $\mathrm{End}(V_5) \simeq \Bbbk$ qui est une $\Bbbk$-algèbre locale. De la même façon, on obtient $\mathrm{End}(V_6) \simeq \Bbbk$.

On en obtient que toutes les représentations étudiés sont indécomposables d'après la Proposition 1.3. En fait, elles sont toutes les représentations indécomposables dans $\mathrm{mod}(Q)$, à isomorphisme près.

On énonce maintenant quelques résultats qui vont nous permettre de démontrer la réciproque de la Proposition 1.3 pour des algèbres comme $\Bbbk Q$.

Proposition 1.4. *Soient M un $\mathcal{A}$-module et $f \in \mathrm{End}(M)$. Si M est noethérien (resp. artinien) et si f est un épimorphisme (resp. monomorphisme), alors f est un automorphisme.*

Démonstration. On démontre le cas où M est noetherien, la preuve pour le cas M artinien est semblable. On considère la suite croissante de sous-modules de M

$$0 \subseteq \mathrm{Ker}\, f \subseteq \mathrm{Ker}\, f^2 \subseteq \cdots.$$

Comme M est noethérien il existe n tel que $\mathrm{Ker}\, f^n = \mathrm{Ker}\, f^{n+1}$. Comme f est surjective, f^n l'est aussi et donc

$$\mathrm{Ker}\, f = f^n\left((f^n)^{-1}(\mathrm{Ker}\, f)\right) = f^n\left((f^{n+1})^{-1}(0)\right) = f^n(\mathrm{Ker}\, f^{n+1}) = f^n(\mathrm{Ker}\, f^n) = 0$$

Et f est injective. □

Lemme 1.1. *(De Fitting) Soit M un $\Bbbk Q$-module de type fini et soit $f \in \mathrm{End}(M)$, il existe $n \in \mathbb{N}_{>0}$ tel que*

$$M = \mathrm{Im}\, f^n \oplus \mathrm{Ker}\, f^n.$$

Démonstration. Comme M est de type fini, d'après le Théorème 1.2, M est noethérien et artinien. On a alors qu'il existe $n > 0$ tel que la suite $M \supseteq f(M) \supseteq f^2(M) \supseteq \cdots$ soit stationnaire et $f^n(M) = (f^n)^2(M)$, donc f^n est un endomorphisme surjectif du $\Bbbk$-module $f^n(M) \subseteq M$ (qui es noetherien car M l'est). D'après la Proposition 1.4, on a que f^n est un automorphisme de $f^n(M)$. Donc $f^n(M) \cap \mathrm{Ker}(f^n) = \emptyset$. Soit maintenant $x \in M$, il existe y tel que $f^{2n}(y) = f^n(x)$, donc $f^n(x - f^n(y)) = 0$ et

$$x = f^n(y) + (x - f^n(y)) \in \mathrm{Im}\, f^n \oplus \mathrm{Ker}\, f^n.$$

□

Corollaire 1.1. *Soit M un $\Bbbk Q$-module de type fini indécomposable, alors* $\mathrm{End}(M)$ *est locale.*

Démonstration. Comme M est indécomposable, on a que $\mathrm{Im}\, f^n = 0$ ou $\mathrm{Ker}\, f^n = 0$. Dans le premier cas, f est nilpotent, et alors $(\mathrm{Id}_M - f) \circ (\mathrm{Id}_M + f + \cdots f^{n-1}) = \mathrm{Id}_M$, c'est-à-dire $\mathrm{Id}_M - f$ es inversible. Dans le deuxième, f^n est injective, et comme M est artinien, f^n est un automorphisme et f en est un aussi. On en déduit que $\mathrm{End}(M)$ est locale. □

Théorème 1.3. *(De décomposition unique) Soient $\mathcal{A}$ une $\Bbbk$-algèbre et M un $\mathcal{A}$-module, si*

$$M = \bigoplus_{i=1}^{n} M_i = \bigoplus_{j=1}^{m} M_j$$

où les $\mathrm{End}(M_i)$ *et les* $\mathrm{End}(M_j)$ *sont locales pour tout i, j, alors $n = m$ et il existe une permutation $\sigma \in S_n$ telle que $M_i \simeq N_{\sigma(i)}$.*

Démonstration. Voir [1][VII 6.13]. □

Corollaire 1.2. *Tout $\Bbbk Q$-module de type fini s'écrit en un somme directe fini des modules indécomposables. Cette somme est unique à isomorphisme près.* □

Remarque. Le théorème 1.3, la proposition 1.4, le lemme 1.1 et les corollaires 1.1 et 1.2 sont vrais pour n'importe quelle algèbre artinienne.

> **Exemple 1.7.** Soit Q le carquois de Kronecker de l'exemple 1.1, comme il est fini et sans cycles orientés, on a que $\Bbbk Q$ est un $\Bbbk$-algèbre artinienne. D'après le théorème 1.3, tout module dans $\mathrm{mod}(Q)$ se décompose de façon unique en somme des modules décrits dans l'exemple 1.6.

Cependant, parfois ce n'est pas simple décrire tous les indécomposables dans $\mathrm{mod}(Q)$, il faut alors regarder autres façons d'étudier cette catégorie. On rappelle la définition suivante.

Définition 1.7. Soit $\mathcal{A}$ un anneau. Un $\mathcal{A}$-module P est dit **projectif** si pour tout épimorphisme $f : M \to N$ et tout morphisme $u : P \to N$, il existe un morphisme $v : P \to M$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "v"'] \arrow[d, "u"] \\ M \arrow[r, two heads, "f"] & N \end{tikzcd}$$

On rappelle aussi qui tout module **libre** est projectif, en particulier $\Bbbk Q$ est un $\Bbbk Q$-module projectif. On sait aussi que un facteur direct d'un module projectif est projectif et toute somme directe de modules projectifs est projective. Soit n le nombre de sommets du carquois Q, d'après l'exemple 1.4 on a que les modules $e_i(\Bbbk Q)$ sont projectifs. On a le théorème suivant.

Théorème 1.4. *Soit M un $\Bbbk Q$- module, alors il existe P_0 et P_1 $\Bbbk Q$-modules projectifs tels que la suite*

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

soit exacte. Une suite de cet type est appelée ***résolution projective*** *de M.*

Démonstration. Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$. On utilise le fait que $\text{mod}(Q) \simeq \text{rep}(Q)$ et on continue à écrire M pour l'image du module M par le foncteur F décrit dans le théorème 1.1. On note aussi $P_i = F(e_i(\Bbbk Q))$ pour tout $i \in Q_0$. Soit $M = (M_i, \phi_\alpha)_{i\in Q_0, \alpha\in Q_1}$ et $d_i = dim(M_i)$. On pose

$$P_0 = \bigoplus_{i\in Q_0} d_i P_i \qquad P_1 = \bigoplus_{\alpha\in Q_1} d_{s(\alpha)} P_{t(\alpha)},$$

où $d_r P_s = \bigoplus_{i=1}^{d_r} P_s$. La somme directe de modules projectifs est aussi projective, ce qui entraîne que $G(P_0)$ et $G(P_1)$ sont projectifs, où G est le foncteur défini dans le théorème 1.1. Le reste de la démonstration peut être consultée dans [5][Théorème 2.15]. $\square$

Remarque. Soit $\mathcal{A}$ un anneau. Pour tout $\mathcal{A}$-module à droite M on a l'existence d'une résolution projective de la forme

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Le théorème 1.4 nous dit que pour $\mathcal{A} = \Bbbk Q$ il en existe une finie de longueur 2.

Un algèbre qui satisfait au théorème 1.4 est dite **héréditaire**. On en obtient que pour étudier $\text{mod}(Q)$ il suffit (à suite exacte près) de regarder les modules projectifs de type fini, qui d'après le théorème 1.2 sont noethériens et artiniens et se décomposent de façon unique en somme directe de facteurs indécomposables projectifs.

Théorème 1.5. *Soit $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ fini sans cycles orientés. Tout $\Bbbk Q$-module indécomposable, projectif de type fini est isomorphe à un module de la forme $e_i(\Bbbk Q)$ avec $i \in Q_0$.*

Démonstration. On sait déjà que chaque $e_i(\Bbbk Q)$ est projectif, étudions $\text{End}(e_i(\Bbbk Q))$. Fixons $i \in Q_0$ et soit $f \in \text{End}(e_i(\Bbbk Q))$, on a que $f(e_i) = f(e_i^2) = f(e_i)e_i \in e_i(\Bbbk Q)e_i$. On définit un morphisme de $\Bbbk$-algèbres $\text{End}(e_i(\Bbbk Q)) \to e_i(\Bbbk Q)e_i$ donné par $f \mapsto f(e_i)$. Cette morphisme est en fait un isomorphisme, donc il suffit d'étudier $e_i(\Bbbk Q)e_i$. L'unité de $e_i(\Bbbk Q)e_i$ est e_i dont la seule décomposition en idempotents orthogonaux est $e_i = e_i + 0$. On a alors que $e_i(\Bbbk Q)$ est indécomposable.

Soit maintenant P un $\Bbbk Q$-module indécomposable et projectif de type fini, il existent alors $n > 0$ et un épimorphisme $\pi : \Bbbk Q^n \twoheadrightarrow P$. Comme P est projectif, π est une rétraction et P est facteur directe de $\Bbbk Q^n$. P est indécomposable, de qui entraîne qu'il est facteur direct indécomposable de $\Bbbk Q$. D'après le théorème 1.3, cette décomposition est unique et il existe $i \in Q_0$ tel que

$$P \simeq e_i(\Bbbk Q).$$

$\square$

On es amené a étudier $\text{mod}(Q)$ en regardant ses modules projectifs indécomposables. On voudrait être dans un contexte où étudier la résolution projective d'un module et le module lui-même soient équivalentes. Cette propriété est atteint en prenant la catégorie dérivé de $\Bbbk Q$. On finit cet chapitre avec un théorème qui nous sera très utile pour la suite.

Théorème 1.6. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre héréditaire. Tout sous-module d'un module projectif est projectif.*

Démonstration. Voir [1][XII, 1.3]. $\square$

Chapitre 2

Catégories Triangulées

Le but des chapitres suivants est d'étudier la catégorie de **complexes bornés** de $\Bbbk Q$. Pour cela, on introduit différentes structures qui vont nous permettre de passer de la catégorie de complexes à la catégorie dérivée de $\Bbbk Q$.

2.1 Catégories de Frobenius

Tout au long de cette section, on fixe $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne (voir Appendice A) et $\mathcal{S}$ un ensemble de suites exactes avec des objets dans $\mathcal{C}$. On note la composition de deux morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ par $gf : X \to Z$. Comme on travaille avec une catégorie abélienne, pour tout $X \in \mathcal{C}$, on note 1_X l'identité dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$.

Définition 2.1. Un monomorphisme (resp. épimorphisme) $f : X \to Y$ dans $\mathcal{C}$ est dit **propre** s'il existe une suite exacte $0 \to X \xrightarrow{f} Y \to Z \to 0$ (resp. $0 \to Z \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \to 0$).

Un objet $P \in \mathcal{C}$ est dit **$\mathcal{S}$-projectif** si pour tout épimorphisme propre $f : M \to N$ et tout morphisme $u : P \to N$ il existe morphisme $v : P \to M$ tel que $u = fv$.

D'autre part, an objet $I \in \mathcal{C}$ est dit **$\mathcal{S}$-injectif** si pour tout monomorphisme propre $f : M \to N$ et tout morphisme $u : M \to I$ il existe morphisme $v : N \to I$ tel que $u = vf$

On dit que $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ a assez des objets $\mathcal{S}$-projectifs si pour tout $X \in \mathcal{C}$ il existe un épimorphisme propre $f : P \to X$ avec P un $\mathcal{S}$-projectif. De la même façon, $(\mathcal{C}\, \mathcal{S})$ a assez des objets $\mathcal{S}$-injectif si pour tout $X \in \mathcal{C}$ il existe un monomorphisme propre $f : X \to I$ avec I un $\mathcal{S}$-injectif.

Définition 2.2. Une catégorie **exacte** est la donnée d'une catégorie additive $\mathcal{C}$ et un ensemble de suites exactes $\mathcal{S}$ qui satisfait les propriétés suivantes :

(i) Toute suite exacte isomorphe à une suite dans $\mathcal{S}$ est dans $\mathcal{S}$. Pour tout objet $X, Y \in \mathcal{C}$ la suite
$$0 \to X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{(0, 1_Y)} Y \to 0$$
est dans $\mathcal{S}$. Pour toute suite exacte $0 \to X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z$, on a que u est le noyau de v et v est le conoyau de u dans $\mathcal{C}$.

(ii) L'ensemble de épimorphismes propres et celui de monomorphismes propres sont fermés pour la composition.

(iii) Soient $g : W \to Z$ un morphisme et $f : Y \to Z$ un épimorphisme propre. Soit (U, p_1, p_2) un produit fibré de f y g avec $gp_1 = fp_2$, alors p_1 est un épimorphisme propre. On a la propriété dual pour une somme amalgamée et un monomorphisme propre.

(iv) Soit $g : Y \to Z$ un morphisme avec un noyau dans M. S'il existe $f : X \to Y$ tel que gf soit un épimorphisme propre, alors f est un épimorphisme propre. De façon duale, si f a un conoyau dans $\mathcal{C}$ et il existe g tel que gf soit un monomorphisme propre, alors f l'est aussi.

Définition 2.3. Une catégorie de **Frobenius** est une catégorie exacte $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ ayant assez d'objets $\mathcal{S}$-injectifs et assez d'objets $\mathcal{S}$-projectifs tel que les $\mathcal{S}$-injectifs coïncident avec les $\mathcal{S}$-projectifs.

Dans l'exemple qui suit, on introduit une catégorie qui va être un des fils conducteurs de ce travail.

Exemple 2.1. (Catégorie de complexes bornés) Considérons à nouveau la catégorie mod(Q). Un **complexe différentiel** (ou complexe simplement) $X^\bullet = (X^i, d^i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $\Bbbk Q$- modules est la donnée des $X^i \in \text{mod}(Q)$ et des morphismes $d^i : X^i \to X^{i+1}$ tels que $d^{i+1}d^i = 0$ pour tout i. En particulier, on a que $\operatorname{Ker} d^{i+1} \subseteq \operatorname{Im} d^i$. On dit qu'un complexe $X^\bullet$ est borné s'il existe un $k > 0$ tel que $X^i = 0$ pour tout $i > |k|$.

Un morphisme entre complexes $X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $Y^\bullet = (Y^i, d_Y^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est donné par $f = \{f^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ avec $f^i : X^i \to Y^i$ morphisme de $\Bbbk Q$- modules tels que $f^{i+1}d_X^i = d_Y^i f^i$. Pour parler de X^i ou f^i on dit, "le module en degré i" ou le "le morphisme en degré i". On note par $\mathcal{C}^b(\text{mod}(Q))$ la catégorie dont les objets sont des complexes bornés de $\Bbbk Q$-modules de type fini et les morphismes sont des morphismes de complexes.

Cette catégorie est abélienne et $\Bbbk$-linéaire. Clairement $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^b(\textbf{mod}(Q))}(X^\bullet, Y^\bullet)$ est un $\Bbbk$-module pour tout complexe $X^\bullet$ et $Y^\bullet$. L'objet nul de cette catégorie est le complexe avec le module nul de mod(Q) en chaque degré, et pour tout $X^\bullet = (X^i, d^i)_{i\in\mathbb{N}}$ on a que $1_{X^\bullet} = (1_{X^i})_{i\in\mathbb{N}}$. D'autre part, si $X^\bullet = (X^i, d^i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $Y^\bullet = (Y^i, d^i)_{i\in\mathbb{N}}$, on définit

$$X^\bullet \oplus Y^\bullet = \left(X^i \oplus Y^i, \begin{pmatrix} d_X^i & 0 \\ 0 & d_Y^i \end{pmatrix} \right)_{i\in\mathbb{N}}.$$

Comme on sait que $X \oplus Y \simeq X \times Y$ pour tout $X, Y \in \text{mod}(Q)$, on a aussi que $X^\bullet \oplus Y^\bullet \simeq X^\bullet \times Y^\bullet$ pour tout complexes $X^\bullet$ et $Y^\bullet$.

Il est facile de voir qu'un épimorphisme dans $\mathcal{C}^b(\text{mod}(Q))$ est un morphisme de complexes tel qu'il est un épimorphisme en chaque degré. En effet, soit $f^\bullet = (f^i)_{i\in\mathbb{N}}$ tel que chaque f^i soit épimorphisme et soient $h^\bullet = (h^i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $g^\bullet = (g^i)_{i\in\mathbb{N}}$ tels que $g^\bullet f^\bullet = h^\bullet f^\bullet$, alors on a que $g^i f^i = h^i f^i$ pour tout i, ce qui entraîne que $g^i = h^i$ pour tout i. Supposons maintenant que $f^\bullet$ est un épimorphisme et $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$. Fixons $i \in \mathbb{N}$ et soient $g : Y^i \to Z$ et $h : Y^i \to Z$ des morphismes tel que $gf^i = hf^i$. On définit $Z^\bullet$ le complexe tel que $Z^j = 0$ pour tout $j \notin \{i, i-1\}$, $Z^i = Z^{i-1} = Z$ et $d^{i-1} = 1_Z$. On pose $g^\bullet : Y^\bullet \to Z^\bullet$ tel qu'en degré $j \notin \{i, i-1\}$, on a que $g^j = 0$, $g^i = 0$ et $g^{i-1} = gd^{i-1}$, on a alors que $g^\bullet$ est un morphisme de complexes. De façon similaire, on définit $h^\bullet$, alors $g^\bullet f^\bullet = h^\bullet f^\bullet$ et $g^\bullet = h^\bullet$ car $f^\bullet$ est épimorphisme, en particulier $g = h$ et f^i est épimorphisme. Un raisonnement similaire démontre qu'un monomorphisme de complexes est un monomorphisme en chaque degré.

Finalement, chaque morphisme de complexes admet un noyau. Prenons à nouveau $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, on pose $\operatorname{Ker} f^\bullet = (\operatorname{Ker} f^i, d_X^i)_{i\in\mathbb{N}}$. $\operatorname{Ker} f^\bullet$ est bien défini, car pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $x \in \operatorname{Ker} f^i$, on a que $f^{i+1}(d_X^i(x)) = d_Y^i(f^i(x)) = d_Y^i(0) = 0$, donc d_X^i restreint à $\operatorname{Ker} f^i$ a bien $\operatorname{Ker} f^{i+1}$ comme codomaine. On a aussi que le conoyau de $f^\bullet$ est donné par $(Y^i/Im(f^i), d_Y^i)_{i\in\mathbb{N}}$.

On rappelle qu'une suite exacte est **scindée** si elle est de la forme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"'] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\simeq"'] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "i_X"] & X \oplus Z \arrow[r, "\pi_Z"] & Z \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

On pose $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$ comme l'ensemble de toutes les suites exactes $0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Z^\bullet \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$ telles que $0 \longrightarrow X^i \xrightarrow{g^i} Y^i \xrightarrow{f^i} Z^i \longrightarrow 0$ soit scindée pour tout $i \in \mathbb{N}$. On voit facilement que $(\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q)), \mathcal{S}_{\Bbbk Q})$ satisfait les propriétés (i), (ii) et (iv) de la définition 2.2. Soient $g^\bullet : W^\bullet \to Z^\bullet$ un morphisme de complexes et $f^\bullet : Y^\bullet \to Z^\bullet$ un épimorphisme propre. Il existe une suite exacte dans $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$ de la forme $0 \to X^\bullet \xrightarrow{h^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Z^\bullet \to 0$. Soit $(U^\bullet, {p_1}^\bullet, {p_2}^\bullet)$ un produit fibré de $f^\bullet$ y $g^\bullet$ avec $g^\bullet {p_1}^\bullet = f^\bullet {p_2}^\bullet$, comme $\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$ est abélienne, d'après A.2 il existe une suite exacte $0 \to V^\bullet \xrightarrow{p^\bullet} U^\bullet \xrightarrow{{p_1}^\bullet} W^\bullet \to 0$ et un morphisme de complexes $q^\bullet : V^\bullet \to X^\bullet$ tels que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V^i \arrow[r, "p^i"] \arrow[d, "q^i"'] & U^i \arrow[r, "p_1^i"] \arrow[d, "p_2^i"'] & W^i \arrow[r] \arrow[d, "g^i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^i \arrow[r, "h^i"] & Y^i \arrow[r, "f^i"] & Z^i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme $f^\bullet$ est un épimorphisme propre, on sait que la deuxième ligne est une suite scindée et il existe $f_*^i : Z^i \to Y^i$ tel que $f^i f_*^i = 1_{Z^i}$. On en déduit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V^i \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1_{V^i} \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "q^i"'] & V^i \oplus W^i \arrow[r, "(0, 1_{W^i})"] \arrow[d, "(p_2^i p^i, f_*^i g^i)"'] & W^i \arrow[r] \arrow[d, "g^i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^i \arrow[r, "h^i"] & Y^i \arrow[r, "f^i"] & Z^i \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le théorème A.2 implique que la suite $0 \to V^i \xrightarrow{p^i} U^i \xrightarrow{p_1^i} W^i \to 0$ est scindée pour tout $i \in \mathbb{N}$. Il se suit que ${p_1}^\bullet$ est un épimorphisme propre. De façon semblable, on démontre le cas pour un monomorphisme propre et une somme amalgamée, ce qui implique que $(\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q)), \mathcal{S}_{\Bbbk Q})$ est une catégorie exacte.

Soit $X \in \mathrm{mod}(Q)$, on définit $P^i(X)$ comme le complexe tel que $P^i(X)^i = P^i(X)^{i+1} = X$, $d^i_{P^i(X)} = 1_X$ et $P^i(X)^j = 0$ pour tout $j \notin \{i, i+1\}$. On démontre que $P^i(X)$ est $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$-projectif. Soit $f^\bullet : M^\bullet \to N^\bullet$ un épimorphisme propre et $u^\bullet : P^i(X) \to N^\bullet$ un morphisme de complexes. Comme f est propre il existe une suite exact dans $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$ de la forme

$$0 \longrightarrow L^\bullet \xrightarrow{g^\bullet} M^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} N^\bullet \longrightarrow 0$$

D'après la définition de $P^i(X)$ le morphisme $u^\bullet$ est concentré dans les degrés i et $i+1$, ailleurs on a que $u^j = 0$ et $u^{i+1} = d^i_N u^i$. Comme les suites $0 \longrightarrow L^i \xrightarrow{g^i} M^i \xrightarrow{f^i} N^i \longrightarrow 0$ et $0 \longrightarrow L^{i+1} \xrightarrow{g^{i+1}} M^{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} N^{i+1} \longrightarrow 0$ sont scindées, il existe $\iota^i_N : N^i \to M^i$ et $\iota^{i+1}_N : N^{i+1} \to M^{i+1}$ tels que $f^i \iota^i_N = 1_{N^i}$ et $f^{i+1}\iota^{i+1}_N = 1_{N^{i+1}}$. On définit $v^\bullet : P^i(X) \to M^\bullet$ en posant $v^j = 0$ pour tout $j \notin \{i, i+1\}$, $v^i = \iota^i_N u^i$ et $v^{i+1} = \iota^{i+1}_N u^{i+1}$. On calcule

$$f^{i+1} d^i_M v^i = f^{i+1} d^i_M \iota^i_N u^i = d^i_N f^i \iota^i_N u^i = d^i_N N u^i = u^{i+1} = f^{i+1}\iota^{i+1}_N u^{i+1} = f^{i+1} v^{i+1}.$$

Comme f^{i+1} est un épimorphisme, on en déduit que $d^i_M v^i = v^{i+1}$ et que $v^\bullet$ est morphisme de complexes. Clairement $f^\bullet v^\bullet = u^\bullet$, ce qui entraîne que $P^i(X)$ est $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$-projectif pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $X \in \mathrm{mod}(Q)$.

Soit maintenant $X^\bullet$ un complexe $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$-projectif, on définit

$$P(X^\bullet) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} P^i(X^i)$$

et $\pi^\bullet : P(X^\bullet) \to X^\bullet$ donné par $\pi^i : X^{i-1} \oplus X^i \xrightarrow{(d^{i-1}_X, 1_{X^i})} X^i$. Clairement $\pi^\bullet$ est un épimorphisme propre, et comme $X^\bullet$ est $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$-projectif alors π est une rétraction et $X^\bullet$ est facteur direct de $P(X^\bullet)$. On en conclut que tous les objets $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$-projectifs sont des complexes isomorphes à des sommes de complexes $P^i(X)$. On note qu'avec un argument similaire, on démontre que la catégorie exacte $(\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q)), \mathcal{S}_{\Bbbk Q})$ a assez de projectifs.

De façon duale, on démontre que le objets $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$-injectifs sont des complexes isomorphes à des sommes de complexes $I^i(X)$ où $I^i(X)^i = I^i(X)^{i-1} = X$, $d^{i-1}_{I^i(X)} = 1_X$ et $I^i(X)^j = 0$ pour $j \notin \{i, i-1\}$; et qu'il y en a assez. On déduit que $(\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q)), \mathcal{S}_{\Bbbk Q})$ est une catégorie de Frobenius.

Soit $M \in \mathrm{mod}(Q)$ et $0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_2} M \longrightarrow 0$, on pourrait étudier ces deux objets dans $\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$. On définit ${M_0}^\bullet = (M^i_0, 0)_{i \in \mathbb{N}}$ le complexe où $M^i_0 = 0$ pour tout $i \neq 0$ et $M^0_0 = 0$; de la même façon on pose ${P_M}^\bullet = (P^i_M, d^i_{P_M}) i \in \mathbb{N}$ tel que $P^i_M = 0$ pour tout $i \notin \{-1, 0\}$, $P^{-1}_M = P_1$, $P^0_M = P_0$ et $d^{-1}_{P_M} = p_1$. En plus, on a un épimorphisme $p^\bullet$ dont le seul morphisme non nul est en degré 0 et égal à p_0 :

$$\begin{array}{ccc} {P_M}^\bullet \\ \downarrow p^\bullet & := \\ {M_0}^\bullet \end{array} \quad \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[r, "p_1"] \arrow[d] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, "p_0"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Comme mentionné à la fin du premier chapitre, on voudrait être dans un contexte où étudier la résolution projectif d'un $\Bbbk Q$-module de type fini soit équivalente à étudier le module. La catégorie $\mathcal{C}(\Bbbk Q)$ est un bon endroit pour commencer, mais jusqu'à maintenant on a seulement un épimorphisme entre la résolutions projectif et le module. On aimerait "serrer" cette catégorie en éliminant des informations superflues.

Définition 2.4. Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ une catégorie de Frobenius et $X, Y \in \mathcal{C}$. On définit $\mathcal{I}(X, Y)$ comme l'ensemble des morphismes $f : X \to Y$ tels qu'il existe $I \in \mathcal{C}$ un objet $\mathcal{S}$-injectif et $u : X \to I$, $v : I \to Y$ tels que $f = vu$. Dans ce cas, on dit que f se factorise par un $\mathcal{S}$-injectif.

Proposition 2.1. *On pose* $\mathcal{I} = \bigcup_{X,Y\in\mathcal{C}} \mathcal{I}(X, Y)$. *Alors* $\mathcal{I}$ *est un idéal de la catégorie* $\mathcal{C}$.

Démonstration. D'abord, on démontre que $\mathcal{I}(X, Y)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$. Soient $f, g \in \mathcal{I}(X, Y)$, alors il existe $u : X \to I$, $v : I \to Y$, $u' : X \to I'$, $v' : I' \to Y$ tels que $f = vu$ et $g = v'u'$. Comme $\mathcal{C}$ est exacte, l'objet $I \oplus I'$ existe et il est $\mathcal{S}$-injectif. On définit $u'' : X \to I \oplus I''$ par $u'' = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$ et $v'' : I \oplus I' \to Y$ par $v'' = (v, v')$. On a que $v''u'' = vu + v'u' = f + g$ et $\mathcal{I}(X, Y)$ est bien un sous-groupe. D'autre part, soit $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, alors $hf = h(vu) = (hv)u$ avec $u : X \to I$ et $hu : I \to Z$, ce qui entraîne que $hf \in \mathcal{I}(X, Z)$. De la même façon, on démontre que pour tout $h' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X)$, $gh' \in \mathcal{I}(Z, X)$. □

D'après A.4 et la proposition 2.1 on obtient l'existence de la catégorie quotient par $\mathcal{I}$ appelé la **catégorie stable** associée à $\mathcal{C}$ et notée $\underline{\mathcal{C}}$. La classe d'un morphisme f dans $\mathcal{C}$ est notée $\underline{f}$.

Lemme 2.1. *Soient* $0 \to X \xrightarrow{\iota} I \xrightarrow{\pi} X' \to 0$ *et* $0 \to X \xrightarrow{\iota'} I' \xrightarrow{\pi'} X'' \to 0$ *deux suites dans* $\mathcal{S}$ *tels que* I *et* I' *soient* $\mathcal{S}$*-injectifs. Alors* $X \cong X'$ *dans* $\underline{\mathcal{C}}$.

Démonstration. Comme ι et ι' sont des monomorphismes propres et I et I' sont $\mathcal{S}$-injectifs, il existe f et f' tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & I \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, equal] & I' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "f'"] & X'' \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota"] & I \arrow[r, "\pi"] & X' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{C}$ est abélienne, il existe g et g' qui complètent le diagramme (voir A.1), c'est-à-dire, on a un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, equal] & I \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "f"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, equal] & I' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "f'"] & X'' \arrow[r] \arrow[d, "g'"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota"] & I \arrow[r, "\pi"] & X' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Cela entraîne que $\iota = f'f\iota$, c'est a dire $(f'f - 1_I)\iota = 0$. Comme π est le conoyau de ι il existe $h : X' \to I$ tel que $f'f - 1_I = h\pi$. On a

$$\pi h\pi = \pi(f'f - 1_I) = \pi f'f - \pi = g'\pi'f - \pi = g'g\pi - \pi = (g'g - 1_{X'})\pi$$

et comme π est épimorphisme on a que $\pi h = g'g - 1_{X'}$, c'est-à-dire le morphisme $g'g - 1_{X'}$ se factorise par I et $\underline{g'g} = \underline{1_{X'}}$. En tournant les lignes on obtient que $\underline{gg'} = \underline{1_{X''}}$, ce qui donne que $X' \simeq X''$ dans $\underline{\mathcal{C}}$. □

Corollaire 2.1. *Soit $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$ une catégorie de Frobenius, tout objet $\mathcal{S}$-injectif est isomorphe à zéro dans $\underline{\mathcal{C}}$.*

Démonstration. Soient I et I' des objets $\mathcal{S}$-injectifs, on a deux suites exactes $0 \to I \xrightarrow{1_I} I \to 0 \to 0$ et $0 \to I \xrightarrow{\iota} I \oplus I' \xrightarrow{\pi} I' \to 0$. D'après le lemme 2.1 on a que $I' \simeq 0$ dans $\underline{\mathcal{C}}$. □

Exemple 2.2. Considérons à nouveau la catégorie $\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$. On dit qu'un morphisme de complexes $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ est homotope à zéro s'il existe des morphismes $k^i : X^i \to Y^{i-1}$ tels que $f^i = d_Y^{i-1}k^i + k^{i+1}d_X^i$. Dans ce cas on écrit $f^\bullet \sim 0$. Si $f^\bullet - g^\bullet \sim 0$, on dit que $f^\bullet$ est homotope à $g^\bullet$ et on écrit $f^\bullet \sim g^\bullet$. On démontre que $f^\bullet \sim 0$ si et seulement si $f^\bullet$ se factorise par un $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$- injectif (on écrit $f \in \mathcal{I}_{\Bbbk Q}$). Supposons qu'il existe $I^\bullet$ complexe $\mathcal{S}$-injectif et morphismes $u^\bullet X^\bullet \to I^\bullet$, $v^\bullet I^\bullet \to Y^\bullet$ tels que $v^\bullet u^\bullet = f^\bullet$. Soit $i \in \mathbb{N}$, d'après de la description des complexes $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$- injectifs on, a $I^{i-1} = H^{i-1 \oplus}J^i$,$I^i = J^i \oplus K^i$ et $I^{i+1} = K^i \oplus H^{i+1}$ avec $d_I^{i-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1_{J^i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $d_I^i = \begin{pmatrix} 0 & 1_{K^i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[d, "u^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "u^i"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "u^{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{i-1} \oplus J^i \arrow[r, "d_I^{i-1}"] \arrow[d, "v^{i-1}"] & J^i \oplus K^i \arrow[r, "d_I^i"] \arrow[d, "v^i"] & K^i \oplus H^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "v^{i+1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y^{i-1} \arrow[r, "d_Y^{i-1}"] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"] & Y^{i+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

On définit $\iota^i : J^i \oplus K^i \to H^{i-1} \oplus J^i$ donné par $\iota^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{J^i} & 0 \end{pmatrix}$ et $\iota^{i+1} : K^i \oplus H^{i+1} \to J^i \oplus K^i$ donné par $\iota^{i+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{K^i} & 0 \end{pmatrix}$. En posant $k^i = v^{i-1}\iota^i u^i$ et $k^{i+1} = v^i\iota^{i+1}u^{i+1}$ on obtient

$$\begin{aligned}
d_Y^{i-1}k^i + k^{i+1}d_X^i &= d_Y^{i-1}v^{i-1}\iota^i u^i + v^i\iota^{i+1}u^{i+1}d_X^i = v^i d_I^{i-1}\iota^i u^i + v^i\iota^{i+1}d_I^i u^i \\
&= v^i(d_I^{i-1}\iota^i + \iota^{i+1}d_I^i)u^i = v^i\left(\begin{pmatrix} 1_{J^i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1_{K^i} \end{pmatrix}\right)u^i \\
&= v^i u^i = f^i
\end{aligned}$$

et $f^\bullet \sim 0$. Réciproquement, supposons que $f^\bullet$ est homotope à zéro, alors il existe des morphismes $k^i : X^i \to Y^{i-1}$ tel que $d_Y^{i-1}k^i + k^{i+1}d_X^i = f^i$. On définit

$$I_X{}^\bullet = \left(X^i \oplus X^{i+1}, \begin{pmatrix} 0 & 1_{X^{i+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

qui est un complexe $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$- injectif. On définit les morphismes $u^\bullet : X^\bullet \to I_X{}^\bullet$ et $v^\bullet$: $I_X{}^\bullet \to Y^\bullet$ donnés par $u^i = \begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ d_X^i \end{pmatrix}$ et $v^i = (d_Y^{i-1}k^i, k^{i+1})$. Alors

$$v^i u^i = (d_Y^{i-1}k^i, k^{i+1}) \begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ d_X^i \end{pmatrix} = d_Y^{i-1}k^i + k^{i+1}d_X^i = f^i$$

ce qui entraîne le résultat. La catégorie quotient par $\mathcal{I}_{\Bbbk Q}$ est appelée la **catégorie homotopique** et on la note $\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$.

Rappelons que d'après A.4, pour toute catégorie de Frobenius $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$, la catégorie $\underline{\mathcal{C}}$ est additive. En général, on ne sait plus comment calculer des noyaux et conoyaux dans cette catégorie quotient, ce qui nous empêche déterminer si $\mathcal{C}$ est abélienne. Par contre, $\mathcal{C}$ a une autre structure très utile à étudier.

2.2 Définition des catégories triangulées

Soit $\mathcal{D}$ une catégorie additive (voir A.2) et T un automorphisme de $\mathcal{D}$. Soit $X \in \mathcal{D}$, on note $T(X)$ pour T appliqué à l'objet X.

Définition 2.5. Un **sextuple** (X, Y, Z, u, v, w) dans $\mathcal{D}$ est donné par des objets $X, Y, Z \in \mathcal{D}$ et morphismes $u : X \to Y$, $v : Y \to Z$ et $w : Z \to T(X)$. On écrit souvent $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} T(X)$.

Un morphisme de sextuples (X, Y, Z, u, v, w) et (X', Y', Z', u', v', w') est un triplet (f, g, h) de morphismes tels que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & T(X) \arrow[d, "T(f)"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & T(X')
\end{tikzcd}$$

Si f, g et h sont des isomorphismes dans $\mathcal{D}$, on dit alors que (f, g, h) est un isomorphisme de sextuples.

Définition 2.6. Un ensemble de sextuples $\mathcal{T}$ est appelé une **triangulation** de $\mathcal{D}$ si les conditions suivantes sont satisfaites. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{D}$ est une **catégorie triangulée** et les sextuples (X, Y, Z, u, v, w) de $\mathcal{T}$ sont appelés triangles, on les note suivant comme

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[dl, "v"'] & \\
Z \arrow[rr, "w"'] & & X \arrow[ul, "u"']
\end{tikzcd}$$

TR1 (i) Toute sextuple isomorphe à un triangle est un triangle

(ii) Pour tout morphisme $u : X \to Y$ il existe un triangle (X, Y, Z, u, v, w)

(iii) Le sextuple $(X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ est un triangle.

TR2 Si (X, Y, Z, u, v, w) est un triangle, alors $(Y, Z, T(X), v, w, -T(u))$ est aussi un triangle.

TR3 Soient (X, Y, Z, u, v, w) et (X', Y', Z', u', v', w') deux triangles et $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ tels que $u'f = gu$, alors il existe un morphisme $h : Z \to Z'$ tel que (f, g, h) soit un morphisme de sextuples.

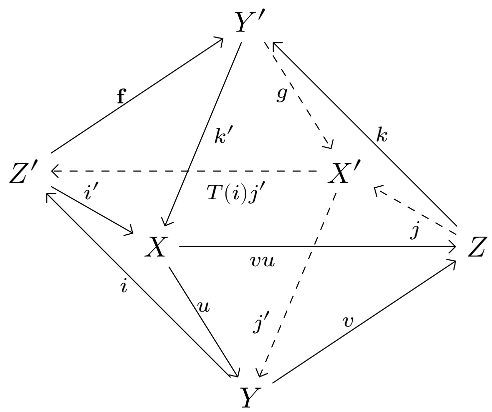
TR4 (L'axiome de l'octaèdre)
Soient (X, Y, Z', u, i, i'), (Y, Z, X', v, j, j'), (X, Z, Y', vu, k, k') des triangles. Alors il existe des morphismes $f : Z' \to Y'$ et $g : Y' \to X'$ tels que

(i) $(Z', Y', X', f, g, T(i)j')$ soit un triangle,

(ii) $(1_X, v, f)$ soit un morphisme entre (X, Y, Z', u, i, i') et (X, Z, Y', vu, k, k'),

(iii) $(u, 1_Z, g)$ soit un morphisme entre (X, Z, Y', vu, k, k') et (Y, Z, X', v, j, j').

Les propriétés (ii) et (iii) sont équivalents au fait que $fi = kv$, $k'f = i'$, $gk = j$ et $T(u)k' = j'g$.



On énonce quelques propriétés fondamentales d'une catégorie triangulé.

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulée, (X, Y, Z, u, v, w) un triangle et M un objet dans $\mathcal{D}$, alors*

(a) $vu = wv = 0$

(b) Soit (f, g, h) un morphisme de triangles entre (X, Y, Z, u, v, w) et (X', Y', Z', u', v', w'), si f et g sont isomorphismes, h l'est aussi

Démonstration. Voir [3][1.2, page 6]. □

2.3 Les catégories stables de catégories de Frobenius sont triangulées

Considérons une catégorie stable $\underline{\mathcal{C}}$ associée à une catégorie de Frobenius $(\mathcal{C}, \mathcal{S})$. Pour tout $X \in \mathcal{C}$ on choisit une suite exacte $0 \longrightarrow X \xrightarrow{\mu(X)} I(X) \xrightarrow{\pi(X)} T(X) \longrightarrow 0$ dans $\mathcal{S}$ où $I(X)$ est $\mathcal{S}$-injectif. Supposons en plus que pour tout $X \in \mathcal{C}$ on a un bijection γ_X entre la classe d'isomorphisme de X et la classe d'isomorphisme de $T(X)$ dans $\underline{\mathcal{C}}$. On demande $\gamma_X(X) = T(X)$. Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$, comme $\mu(X)$ est un monomorphisme propre et $I(Y)$ est $\mathcal{S}$-injectif il existe un morphisme $I(f) : I(X) \to I(Y)$ tel que $I(f)\mu(X) = \mu(Y)f$. Comme $\mathcal{C}$ est abélienne il existe un unique $T(f)$ tel que $T(f)\pi(X) = \pi(Y)I(f)$. La classe d'équivalence de $T(f)$ ne dépend pas du choix de $I(f)$, soit $I'(f)$ un autre morphisme tel que $I'(f)\mu(X) = \mu(Y)f$ et soit $T'(f)$ le morphisme induit tel que $T'(f)\pi(X) = \pi(Y)I'(f)$, on va montrer que $T(f) - T'(f)$ se factorise par un injectif. Considérons à nouveau la suite exacte

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{\mu(X)} I(X) \xrightarrow{\pi(X)} T(X) \longrightarrow 0.$$

On sait que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, I(Y)))$ est exact à gauche, donc on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T(X), I(y)) \xrightarrow{-\circ\overline{x}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(I(X), I(Y)) \xrightarrow{-\circ x} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, I(Y))$$

Notons en plus que $(I(f) - I'(f))x = yf - yf = 0$, pour la propriété universelle du conoyau de $T(X)$ il existe $\phi : T(X) \to I(Y)$ tel que $\phi\overline{x} = I(f) - I'(f)$. On a

$$\overline{y}\phi\overline{x} = \overline{y}(I(f) - I'(f)) = (T(f) - T'(f))\overline{x}$$

Comme $-\circ\overline{x}$ est un monomorphisme on obtient que $T(f) - T'(f) = \overline{y}\phi$, et $T(f) = T'(f)$ dans $\underline{\mathcal{C}}$. D'après ces remarques, on obtient un automorphisme T de la catégorie stable $\underline{\mathcal{C}}$.

Exemple 2.3. Considérons à nouveau $\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$, on définit le foncteur $T : \mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q)) \to \mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$ tel que pour tout complexe $X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ et morphisme $f^\bullet = (f^i)_{i\in\mathbb{N}}$ on a

$$T(X^\bullet)^i = X^{i+1} \quad d_{T(X)}^i = -d_X^{i+1} \quad T(f^\bullet)^i = f^{i+1}$$

T est un automorphisme de $\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$. Comme pour tout complexe $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$ -injectif $I^\bullet$ on a que $T(I^\bullet)$ est encore $\mathcal{S}_{\Bbbk Q}$ -injectif, alors pour tout $f^\bullet \in \mathcal{I}_{\Bbbk Q}$ on a $T(f^\bullet) \in \mathcal{I}_{\Bbbk Q}$. On obtient que le foncteur induit par T sur $\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$ est encore un automorphisme de catégories. En fait, pour tout $X^\bullet$ on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{x^\bullet} I(X^\bullet) \xrightarrow{\overline{x}^\bullet} T(X^\bullet) \longrightarrow 0$$

avec

$$I(X^\bullet) = \left(X^i \oplus X^{i+1}, \begin{pmatrix} 0 & 1_{X^{i+1}} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)_{i\in\mathbb{N}}$$

$$x^i = \begin{pmatrix} 1_{X^i} \\ d^i \end{pmatrix} \quad \overline{x}^i = (-d_X^i, 1_{X^{i+1}}).$$

Donc T es un automorphisme de $\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$ de la forme abordée ci-dessus.

Soient maintenant $X, Y \in \mathcal{C}$ et $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, on considére le diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "u"] & I(X) \arrow[r, "\overline{x}"] \arrow[d, "\overline{u}"] & T(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "v"] & C_u \arrow[r, "w"] & T(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où $(C_u, v, \overline{u})$ est une somme amalgamée de u et x. On définit un sextuple standard comme l'image d'une suite de la forme $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} C_u \xrightarrow{w} T(X)$ dans $\underline{\mathcal{C}}$. On pose $\mathcal{T}_{\underline{\mathcal{C}}}$ l'ensemble des sextuples dans $\underline{\mathcal{C}}$ qui sont isomorphes à un sextuple standard. On énonce le théorème principal de ce chapitre.

Théorème 2.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Frobenius, alors l'ensemble $\mathcal{T}_{\underline{\mathcal{C}}}$ est une triangulation de $\underline{\mathcal{C}}$.*

Démonstration. On va vérifier que $\mathcal{T}_{\underline{\mathcal{C}}}$ satisfait tous les axiomes décrits dans la définition 2.6.

TR1 D'après la définition de $\mathcal{T}_{\underline{\mathcal{C}}}$ on a que cet ensemble est fermé par isomorphisme et pour tout $\underline{u} : X \to Y$ il y existe un triangle $(X, Y, Z, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$. D'autre part, considérons $X \in \mathcal{C}$, on a le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & I(X) \arrow[r, "\overline{x}"] \arrow[d, equal] & T(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "x"] & I(X) \arrow[r, "\overline{x}"] & T(X)
\end{tikzcd}$$

où $I(X), x, 1_{I(X)}$ est une somme amalgamé de 1_X et x. On a que la sextuple $(X, X, I(X), 1_X, x, \overline{x})$ est standard. D'après le corollaire 2.1 on sait que $I(X) \simeq 0$ dans $\underline{\mathcal{C}}$, donc on a bien que $(X, X, 0, 1_X, 0, 0) \in \mathcal{T}_{\underline{\mathcal{C}}}$.

TR3 Considérons les sextuples standards

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "x"] & Y \arrow[d, "v"] \\
I(X) \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[d, "\overline{x}"] & C_u \arrow[d, "w"] \\
T(X) \arrow[r, equal] & T(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "x'"] & Y' \arrow[d, "v'"] \\
I(X') \arrow[r, "\overline{u}'"] \arrow[d, "\overline{x}'"] & C_{u'} \arrow[d, "w'"] \\
T(X') \arrow[r, equal] & T(X')
\end{tikzcd}$$

tels qu'il existe des morphismes f et g qui satisfont $\underline{u'f} = \underline{gu}$ dans $\underline{\mathcal{C}}$. C'est-à-dire, il existe un objet I $\mathcal{S}$-injectif et des morphismes $\alpha' : X \to I$ $\alpha'' : I \to Y'$ tels que $gu - u'f = \alpha''\alpha'$. Comme x est monomorphisme propre et $I(X)$ est $\mathcal{S}$- injectif il existe un morphisme $\beta : I(X) \to I$ tel que $\alpha' = \beta x$. On pose $\alpha = \alpha''\beta$, et on a $gu - u'f = \alpha x$. On a déjà vu que f induit morphismes $I(f) : I(X) \to I(X')$ et $T(f) : T(X) \to T(X')$ tels que $x'f = I(f)x$ et $\overline{x}'I(f) = T(f)\overline{x}$. On obtient des morphismes $v'g : Y \to C_{u'}$ et $\overline{u}'I(f) + v'\alpha : I(X) \to C_{u'}$ tels que

$$(v'g)u = v'u'f + v'\alpha x = \overline{u}'x'f + v'\alpha x = \overline{u}'I(f)x + v'\alpha x = (\overline{u}'I(f) + v'\alpha)x$$

Grâce à la propriété universelle de la somme amalgamée, il existe un morphisme $h : C_u \to C_{u'}$ tel que $hv = v'g$ et $h\overline{u} = \overline{u}'I(f) + v'\alpha$. On a

$$T(f)wv = T(f)0 = 0 = 0\ g = w'v'g = w'hv$$

$$\begin{aligned}
T(f)w\overline{u} = T(f)\overline{x} = \overline{x}'I(f) &= w'\overline{u}'I(f) \\
&= I(f)w'\overline{u}' + w'v'\alpha \\
&= w'(\overline{u}'I(f) + v'\alpha) = w'h\overline{u}
\end{aligned}$$

Encore par la propriété universelle de C_u on obtient que $T(f)w = w'h$ et on a un morphisme de sextuples (f, g, h). Soient maintenant $(X, Y, Z, \underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ et $(X', Y', Z', \underline{u'}, \underline{v'}, \underline{w'})$ deux sextuples dans $\mathcal{T}_{\underline{\mathcal{C}}}$ et $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ des morphismes tels que $\underline{u'f} = \underline{gu}$. En appliquant ce qui précède aux sextuples standards isomorphes à chaque sextuple on déduit le résultat.

TR2 Comme T est un automorphisme de $\mathcal{C}$ il suffit de regarder le cas pour sextuples standards. Soit (X, Y, C_u, u, v, w) un sextuple standard dont le diagramme commutatif correspondant est

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "u"] & I(X) \arrow[r, "\overline{x}"] \arrow[d, "\overline{u}"] & T(X) \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, "v"] & C_u \arrow[r, "w"] & T(X)
\end{tikzcd}$$

Considérons $0 \longrightarrow Y \overset{y}{\longrightarrow} I(Y) \overset{\overline{x}}{\longrightarrow} T(Y) \longrightarrow 0$ une suite exacte dans $\mathcal{S}$ avec $I(Y)$ un objet $\mathcal{S}$-injectif. Il existe des morphismes $I(u) : I(X) \to I(Y)$ et $T(u) : T(X) \to T(Y)$ tel que $I(u)x = yu$ et $T(u)\overline{x} = \overline{y}I(u)$. Par la propieté universelle de la somme amalgamée il existe un morphisme $f : C_u \to I(Y)$ tel que $f\overline{u} = I(u)$ et $fv = y$. Notons que

$$\overline{y}fv = \overline{y}y = 0 = T(u)wv$$

$$\overline{y}f\overline{u} = \overline{y}I(u) = T(u)\overline{x} = T(u)w\overline{u}$$

et du fait que C_u est une somme amalgamée on a que $\overline{y}f = T(u)w$. On obtient le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "y"] & C_u \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} f \\ w \end{pmatrix}"] & T(X) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & I(Y) \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1_{I(Y)} \\ 0 \end{pmatrix}"] \arrow[d, "\overline{y}"] & I(Y) \oplus T(X) \arrow[r, "(0, 1_{T(X)})"] \arrow[d, "(\overline{y}, -T(u))"] & T(X) \arrow[r] & 0 \\
 & T(Y) \arrow[r, equal] \arrow[d] & T(Y) \arrow[d] & & \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Où les deux premières lignes sont des suites exactes. Comme $\mathcal{C}$ est abélienne, d'après A.3 on a que le carré

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "y"] & C_u \arrow[d, "\begin{pmatrix} f \\ w \end{pmatrix}"] \\
I(Y) \arrow[r, "\begin{pmatrix} 1_{I(Y)} \\ 0 \end{pmatrix}"] & I(Y) \oplus T(X)
\end{tikzcd}$$

est une somme amalgamée. En particulier, on obtient que

$$\left(Y, C_u, I(Y) \oplus T(X), v, \begin{pmatrix} f \\ w \end{pmatrix}, (\overline{y}, -T(u))\right)$$

est un sextuple standard. En plus $I(Y) \simeq 0$ dans $\underline{\mathcal{C}}$, ce qui entraîne que le sextuple obtenu est isomorphe à $(Y, C_u, T(X), v, w, -T(u))$.

TR4 Comme avant, il suffit de regarder le cas pour les sextuples standards. Considérons les triangles

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "x"] & Y \arrow[d, "i"] \\
I(X) \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[d, "\overline{x}"] & Z' \arrow[d, "i'"] \\
T(X) \arrow[r, equal] & T(X)
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "y"] & Z \arrow[d, "j"] \\
I(Y) \arrow[r, "\overline{v}"] \arrow[d, "\overline{y}"] & X' \arrow[d, "j'"] \\
T(Y) \arrow[r, equal] & T(Y)
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "w"] \arrow[d, "x"] & Z \arrow[d, "k"] \\
I(X) \arrow[r, "\overline{w}"] \arrow[d, "\overline{x}"] & Y' \arrow[d, "k'"] \\
T(X) \arrow[r, equal] & T(X)
\end{tikzcd}
$$

avec $w = vu$. Considérons la suite exacte $0 \to Z' \xrightarrow{z} I(Z') \xrightarrow{\overline{z}} T(Z') \to 0$ dans $\mathcal{S}$ avec $I(Z')$ un objet $\mathcal{S}$-injectif. En prenant la suite exacte $0 \to Y \xrightarrow{i} Z' \xrightarrow{i'} T(X) \to 0$ on obtient le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, equal] & Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "z"] & T(X) \arrow[r] \arrow[d, "l"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, "zi"] & I(Z') \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\overline{z}"] & M \arrow[r] \arrow[d, "l'"] & 0 \\
 & & T(Z') \arrow[r, equal] \arrow[d] & T(Z') \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

où (M, h) est le conoyau de zi, l est l'unique morphisme qui fait que les deux premières lignes soient un diagramme commutatif, et l' est l'unique morphisme tel que $l'h = \overline{z}$ qui se déduit du fait que $\overline{z}zi = 0$ et de la propreté universelle de (M, h). Par le lemme du serpent on obtient la suite exacte

$$0 \to 0 \to \operatorname{Ker} l \to 0 \to T(Z') \to \operatorname{Coker} l$$

qui entraîne que l soit un monomorphisme. Notons que $l'li' = l'hz = \overline{z}z = 0i'$, donc $l'l = 0$ car i' est un épimorphisme. On en déduit le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z' \arrow[r, "z"] \arrow[d, "i"] & I(Z') \arrow[r, "\overline{z}"] \arrow[d, "h"] & T(Z') \arrow[r] \arrow[d, shift left, "s"] & 0 \\
0 \arrow[r] & T(X) \arrow[r, "l"] & M \arrow[r, "t"] \arrow[ur, "l'"] & M' \arrow[r] \arrow[u, dashed, shift left, "s'"] & 0
\end{tikzcd}
$$

où (M', t) est le conoyau de l et s' est l'unique morphisme tel que $l = s't$. On a que $sl'h = s\overline{z} = th$, comme h est un épimorphisme on a que $sl' = t$. On a aussi que $s's\overline{z} = s'th = l'h = \overline{z}$ et $ss't = sl' = t$ avec $\overline{z}$ es t épimorphismes, on en

déduit que $ss' = 1_{M'}$ es $s's = 1_{T(Z')}$. On en obtient que $(T(Z'), l')$ est le conoyau de l.
On prend la suite $0 \to Y \xrightarrow{zi} I(Z') \xrightarrow{h} M \to 0$ à la place de $0 \to Y \xrightarrow{y} I(Y) \xrightarrow{\overline{y}} T(Y) \to 0$, car d'après le lemme 2.2 les triangles standard correspondants sont isomorphes dans $\mathcal{C}$. En changent la notation, on suppose que $I(Y) = I(Z')$, $y = zi$ et $\overline{y} = h$. Comme $yu = ziu = z\overline{u}x$ et $hz\overline{u} = li'\overline{u} = l\overline{x}$, on pose $z\overline{u} = I(u)$, $T(u) = l$ et $T(u)\overline{x} = \overline{y}I(u) = hz\overline{u} = \overline{y}z\overline{u}$. Observons que $zi = y1_{Z'} = I(i)y$, donc on écrit $I(i)$ pour $1_{Z'}$, et on a un morphisme induit $T(i) : T(Y) \to T(Z')$ tel que $\overline{z} = I(i)\overline{z} = T(i)\overline{y}$.
Comme $\overline{w}x = kw = kvu$ et Z' est une somme amalgamée de u et x, il existe $f : Z' \to Y'$ tel que $\overline{w} = f\overline{u}$ et $kv = fi$. On a aussi que $jw = jvu = \overline{v}yu = \overline{v}ziu = \overline{v}z\overline{u}x$, alors il existe un morphisme $g : Y' \to X'$ tel que $g\overline{w} = \overline{v}z\overline{u}$ et $gk = j$, grâce à la propriété universelle de Y'. En plus, on a que $gfi = gkv = jv = \overline{v}y = \overline{v}zi$ et $gf\overline{u} = g\overline{w} = \overline{v}z\overline{u}$. Donc par la propriété universelle de Z' on a $gf = \overline{v}z$. On obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "x"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "i"] & Z \arrow[d, "k"] \\
I(X) \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[d, "\overline{x}"] & Z' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "z"] & Y' \arrow[d, "g"] \\
T(X) \arrow[dr, "T(u)"'] & I(Z') \arrow[r, "\overline{v}"] \arrow[d, "\overline{y}"] & X' \arrow[d, "T(i)j'"] \\
 & T(Y) \arrow[r, "T(i)"] & T(Z')
\end{tikzcd}$$

avec $f\overline{u} = \overline{w}$, $zi = y$, $gk = j$ et $fi = kv$ par construction de f et g. On démontre maintenant que $k'f = i'$. En effet, $k'fi = k'kv = 0 = i'i$ et $k'f\overline{u} = k'\overline{w} = \overline{x} = i'\overline{u}$ et comme Z' est une somme amalgamée, on obtient $k'f = i'$. D'autre part, $T(u)k'k = 0 = j'j = j'gk$ et $j'g\overline{w} = j'\overline{v}z\overline{u} = \overline{y}z\overline{u} = T(u)\overline{x} = T(u)k'\overline{w}$, en utilisant la propriété universelle de Y'. On démontre que $(X', g, \overline{v})$ est une somme amalgamée de f et z. D'abord, on note que (Y', f, k) est une somme amalgamée de i et v. Supposons maintenant qu'il existe (Q, q_1, q_2) tel que $q_1 f = q_2 z$, alors on a que $q_2 y = q_2 zi = q_1 fi = q_1 kv$, comme X' est une somme amalgamée de v et y, il existe $r : X' \to Q$ tel que $rj = rgk = q_1 k$ et $r\overline{v} = q_2$. On a aussi que $q_1 f = q_2 z = f\overline{v}z = rgf$, d'après la propriété universelle de Y' en étant somme amalgamée de i et v on obtient que $rg = q_1$. L'unicité de r est donné aussi pour la propriété universelle de X'.
D'autre part, comme z est monomorphisme, g l'est aussi. On a que $T(i)j'gk = T(i)j'j = 0$ et comme k est monomorphisme, on obtient $T(i)j'g = 0$. En prenant le même argument utilisé pour démontrer que $T(Z') \simeq M'$ on arrive au fait que $\operatorname{Coker} g \simeq T(Z')$, on conclut que le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
Z' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "z"] & Y' \arrow[d, "g"] \\
I(Z') \arrow[r, "\overline{v}"] \arrow[d, "\overline{z}"] & X' \arrow[d, "T(i)j'"] \\
T(Z') \arrow[r, equal] & T(Z')
\end{tikzcd}
$$

est commutatif avec des colonnes exactes et $(X', g, \overline{v})$ somme amalgamée de f et z, c'est-à-dire, $(Z', Y', X', f, g, T(i)j')$ est un sextuple standard. Ceci conclut la démonstration. □

Exemple 2.4. D'après le théorème 2.1 on sait que la catégorie $\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$ est triangulé, décrivons les sextuples standard. Soient $X^\bullet$, $Y^\bullet$ des complexes dans $\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$ et $u^\bullet \colon X^\bullet \to Y^\bullet$ un morphisme de complexes. On a le diagramme commutatif à colonnes exactes

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
X^\bullet \arrow[r, "u^\bullet"] \arrow[d, "x^\bullet"] & Y^\bullet \arrow[d, "v^\bullet"] \\
I(X^\bullet) \arrow[r, "\overline{u}^\bullet"] \arrow[d, "\overline{x}^\bullet"] & C_u{}^\bullet \arrow[d, "w^\bullet"] \\
T(X^\bullet) \arrow[r, equal] \arrow[d] & T(X^\bullet) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}
$$

où $I(X^\bullet)$, $T(X^\bullet)$, $x^\bullet$ et $\overline{x}^\bullet$ ont été définis dans l'exemple 2.3 et $C_u{}^\bullet = (T(X^\bullet)^i \oplus Y^i, d^i_{C_u{}^\bullet})_{i\in\mathbb{N}}$ avec

$$
d^i_{C_u{}^\bullet} = \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} \qquad \overline{u}^i = \begin{pmatrix} d_X^i & -1_X^{i+1} \\ u^i & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
v^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_Y^i \end{pmatrix} \qquad w^i = (1_X^i, 0)
$$

D'après le théorème A.3 $(C_u{}^\bullet, v^\bullet, \overline{u}^\bullet)$ est une somme amalgamée de $u^\bullet$ et $x^\bullet$. Le complexe $C_u{}^\bullet$ est appelé le **cône** de $u^\bullet$ et $(X^\bullet, Y^\bullet, C_u{}^\bullet, u^\bullet, v^\bullet, w^\bullet)$ est un triangle standard dans $\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$.

Définition 2.7. Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulé et $\mathcal{B}$ une catégorie abélienne. Un foncteur additif $H : \mathcal{D} \to \mathcal{B}$ est un **foncteur cohomologique** si pour tout triangle (X, Y, Z, u, v, w), la suite

$$\cdots \to H(T^i(X)) \xrightarrow{H(T^i(u))} H(T^i(Y)) \xrightarrow{H(T^i(v))} H(T^i(Z)) \xrightarrow{H(T^i(w))} H(T^{i+1}(X)) \to \cdots$$

est exacte.

Si H est contravariant, on dit qu'il est un foncteur cohomologique si la suite

$$\cdots \to H(T^{i+1}(X)) \xrightarrow{H(T^i(w))} H(T^i(Z)) \xrightarrow{H(T^i(v))} H(T^i(Y)) \xrightarrow{H(T^i(u))} H(T^i(X)) \to \cdots$$

est exacte.

Exemple 2.5 (Cohomologie d'un complexe). Soit $X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i\in\mathbb{N}}$ un complexe borné, on définit la cohomologie en degré i de $X^\bullet$ comme le $\Bbbk Q$-module

$$H^i(X^\bullet) = \operatorname{Ker} d_X^i / \operatorname{Im} d_X^{i-1}$$

Soit $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ un morphisme de complexes, alors f induit un morphisme entre $H^i(X^\bullet)$ et $H^i(Y^\bullet)$. En effet, si $x \in \operatorname{Ker} d_X^i$, alors $d_Y^i(f^i(x)) = f^{i+1}(d_X^i(x)) = 0$ et $f^i(x) \in \operatorname{Ker} d_Y^i$. En plus, si $x \in \operatorname{Im} d_X^{i-1}$ il existe $x' \in X^{i-1}$ tel que $d_X^{i-1}(x') = x$ ce qui implique que $f^i(x) = f^i(d_X^{i-1}(x')) = d_Y^{i-1}(f^{i-1}(x'))$ et $f^i(x) \in \operatorname{Im} d_Y^{i-1}$. On obtient un morphisme

$$H^i(f) : H^i(X^\bullet) \to H^i(Y^\bullet)$$

donné par $\overline{f^i}(\overline{x}) = \overline{f^i(x)}$ pour tout $\overline{x} \in H^i(X^\bullet) = \operatorname{Ker} d_X^i / \operatorname{Im} d_X^{i-1}$.

Soit $g^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ un morphisme de complexes tel que $f^\bullet \sim g^\bullet$. Alors il existe $k^i : X^i \to Y^{i-1}$ tels que $f^i - g^i = k^{i+1}d_X^i + d_Y^{i-1}k^i$. On a que

$$\begin{aligned} H^i(f-g)(\overline{x}) = \overline{(f^i - g^i)(x)} &= \overline{(k^{i+1}d_X^i + d_Y^{i-1}k^i)(x)} \\ &= \overline{k^{i+1}(d_X^i(x)) + d_Y^{i-1}(k^i(x))} = \overline{d_Y^{i-1}(k^i(x))} = 0 \end{aligned}$$

pour tout $\overline{x} \in H^i(X^\bullet)$. C'est-à-dire, si $f^\bullet \sim g^\bullet$, on a $H^i(f^\bullet) = H^i(g^\bullet)$. On en obtient un foncteur $H^i : \mathcal{K}^b(\operatorname{mod}(Q)) \to \operatorname{mod}(Q)$ qui est en plus additif. On affirme que H^i est un foncteur cohomologique et on le démontre pour les triangles standards. Considérons à nouveau le morphisme $f^\bullet$ et le triangle standard $\left(X^\bullet, Y^\bullet, C_f{}^\bullet, f^\bullet, \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1_{T(X^\bullet)}, 0 \end{pmatrix}\right)$ défini dans l'exemple 2.4. D'abord, on démontre que la suite

$$H^i(Y^\bullet) \xrightarrow{H^i\begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix}} H^i(C_f{}^\bullet) \xrightarrow{H^i\left(1_{T(X^\bullet)}, 0\right)} H^i(T(X^\bullet))$$

est exacte. Soit $(x,y)^t \in \operatorname{Ker} d^i_{C_f{}^\bullet}$ tel que $x \in \operatorname{Im}(-d_X^i)$, alors il existe $x' \in X^i$ tel que $-d_X^i(x') = x$. On a

$$\begin{aligned} d^i_{C_f{}^\bullet}(x,y)^t = d^i_{C_f{}^\bullet}(-d_X^i(x'), y)^t &= \begin{pmatrix} -d_X^{i+1} & 0 \\ f^{i+1} & d_Y^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -d_X^i(x') \\ y \end{pmatrix} \\ &= \left(d_X^{i+1} d_X^{i+1}(x), -f^{i+1}d_X^i(x') + d_Y^i(y)\right)^t \\ &= \left(0, d_Y^i(y - f^i(x'))\right)^t = (0,0)^t \end{aligned}$$

ce qui implique que $y - f^i(x') \in \operatorname{Ker} d^i_Y$. D'autre part, on a que

$$d^{i-1}_{C_f^\bullet}(x',0)^t = \begin{pmatrix} -d^i_X & 0 \\ f^i & d^{i-1}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ 0 \end{pmatrix} = (-d^i_X(x'), f^i(x'))^t = (x,y)^t - (0, y - f^i(x'))^t$$

C'est-à-dire $\overline{(x,y)^t} = \overline{(0, y - f^i(x))^t} = H^i \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix} (y - f^i(x))$, et $(x,y)^t \in \operatorname{Im}\left(H^i \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix}\right)$.
D'autre part comme H^i est un foncteur, on a que

$$H^i(1_{T(X^\bullet)}, 0) H^i \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix} = H^i\left((1_{T(X^\bullet)}, 0)\begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix}\right) = 0.$$

On en déduit que $\operatorname{Ker}\left(H^i(1_{T(X^\bullet)}, 0)\right) = \operatorname{Im}\left(H^i \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix}\right)$.

On calcule maintenant le noyau de $H^i \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix}$. Soit $y \in \operatorname{Ker} d^i_Y$ tel que $\overline{(0,y)^t} = 0$, il existe $(x', y')^t$ tel que

$$(0,y)^t = \begin{pmatrix} -d^i_X & 0 \\ f^i & d^{i-1}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (-d^i_X(x'), f^i(x') + d^{i-1}_Y(y'))^t$$

on en obtient que $\overline{y} = \overline{f^i(x') + d^{i-1}_Y(y')} = \overline{f^i(x')}$ avec $x' \in \operatorname{Ker} d^i_X$. On a alors que la suite

$$\cdots \to H^i(X^\bullet) \xrightarrow{H^i(f^\bullet)} H^i(Y^\bullet) \xrightarrow{H^i\begin{pmatrix} 0 \\ 1_{Y^\bullet} \end{pmatrix}} H^i(C_f^\bullet) \xrightarrow{H^i(1_{T(X^\bullet)},0)} H^i(T(X^\bullet) \to \cdots$$

est exacte et H^i est cohomologique.

Proposition 2.3. *Soit $\mathcal{D}$ une catégorie triangulé et $M \in \mathcal{D}$, alors les foncteurs* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(-, M)$ *et* $\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(M, -)$ *sont cohomologiques.*

Démonstration. Voir [3][1.2, page 6]. □

Lemme 2.2. *Soit $u : X \to Y$ un morphisme dans $\mathcal{C}$ et $0 \to X \to I(X) \to T(X) \to 0$, $0 \to X \to I'(X) \to T'(X) \to 0$ deux suites dans $\mathcal{S}$ avec $I(X)$ et $I'(X)$ des objets $\mathcal{S}$-injectifs. Considérons les sextuples standards correspondants*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "x"] & Y \arrow[d, "v"] \\ I(X) \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[d, "\overline{x}"] & Z \arrow[d, "w"] \\ T(X) \arrow[r, equal] & T(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "x'"] & Y \arrow[d, "v'"] \\ I'(X) \arrow[r, "\overline{u}'"] \arrow[d, "\overline{x}'"] & Z' \arrow[d, "w'"] \\ T'(X) \arrow[r, equal] & T'(X) \end{tikzcd}$$

Alors (X, Y, Z, u, v, w) *et* (X, Y, Z', u, v', w') *sont des triangles isomorphes dans* $\underline{\mathcal{C}}$.

Démonstration. D'après la preuve du lemme 2.1 il existe des morphismes f et g tels que $\underline{g}$ soit un isomorphisme dans $\underline{\mathcal{C}}$ et tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "x"] \arrow[d, equal] & I(X) \arrow[r, "\overline{x}"] \arrow[d, "f"] & T(X) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "x"] & I'(X) \arrow[r, "\overline{x}'"] & T'(X) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De la même façon, il existe des morphismes $I(u)$ et $T(u)$ tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "x'"] \arrow[d, "u"] & I'(X) \arrow[r, "\overline{x}'"] \arrow[d, "I(u)"] & T'(X) \arrow[d, "T(u)"] \\
Y \arrow[r, "y"] & I(Y) \arrow[r, "\overline{y}"] & T(Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "x"] \arrow[d, "u"] & I(X) \arrow[r, "\overline{x}"] \arrow[d, "I(u)f"] & T(X) \arrow[d, "T(u)g"] \\
Y \arrow[r, "y"] & I(Y) \arrow[r, "\overline{y}"] & T(Y)
\end{tikzcd}$$

soient commutatifs. On en déduit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, equal] \arrow[dd, "x"'] & & Y \arrow[dr, equal] \arrow[dd, dashed, "v"] & \\
& X \arrow[rr, "u"] \arrow[dd, "x'"] & & Y \arrow[dd, "v'"] \\
I(X) \arrow[rr, dashed, "\overline{u}"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "\overline{x}"'] & & Z \arrow[dr, dashed, "\alpha"] \arrow[dd, dashed, "w"] & \\
& I'(X) \arrow[rr, "\overline{u}'"] \arrow[dd, "\overline{x}'"] & & Z' \arrow[dd, "w'"] \\
T(X) \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "g"] & & T(X) \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[dd, dashed, "T(u)g"'] & \\
& T'(X) \arrow[rr, equal] & & T'(X) \arrow[dd, "T(u)"] \\
& & T(Y) \arrow[dr, equal] & \\
& & & T(Y)
\end{tikzcd}$$

Comme (TR4) ne s'utilise pas dans la preuve du lemme 2.3, on en déduit que pour tout objet A dans $\mathcal{C}$ le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,X) \arrow[r, "\underline{u}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,Y) \arrow[r, "\underline{v}"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,Z) \arrow[r, "\underline{w}"] \arrow[d, "\underline{\alpha}"] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,T(X)) \arrow[r, "\underline{T(u)g}"] \arrow[d, "\underline{g}"] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,T(Y)) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,X) \arrow[r, "\underline{u}"] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,Y) \arrow[r, "\underline{v'}"] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,Z') \arrow[r, "\underline{w'}"] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,T'(X)) \arrow[r, "\underline{T(u)}"] & \mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A,T(Y))
\end{tikzcd}$$

est commutatif. D'après le lemme des cinq on obtient que le morphisme $\underline{\alpha} \circ -$ est un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A, Z)$ et $\mathrm{Hom}_{\underline{\mathcal{C}}}(A, Z')$ pour tout objet A. Le lemme de Yoneda implique que $\underline{\alpha}$ est un isomorphisme et les deux triangles sont isomorphes dans $\underline{\mathcal{C}}$. $\square$

Chapitre 3

Catégories Dérivées

Considérons un module $M \in \text{mod}(Q)$ avec sa résolution projective $0 \to P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{p_0} M \to 0$, et les complexes $M_0{}^\bullet$ et $P_M{}^\bullet$ définis dans la section 2. On a que $H^i(M_0{}^\bullet) = H^i(P_M{}^\bullet) = 0$ pour tout $i \neq 0$ et $M = H^0(M_0{}^\bullet) \cong H^0(P_M{}^\bullet) = P_0/\operatorname{Im} p_1 = P_0/\operatorname{Ker} p_0$. En fait, soit $p^\bullet : M_0{}^\bullet \to P_M{}^\bullet$ le morphisme de complexes induit par p_0, on a que $H^0(p^\bullet)$ est un isomorphisme entre M et $P_0/\operatorname{Ker} p_0$. Réciproquement, si on avait un morphisme de complexes $q^\bullet : Q^\bullet \to M_0{}^\bullet$ tel que Q^i soit un module projectif pour tout i et $H^0(q^\bullet)$ soit un isomorphisme, alors on obtient que $\cdots \to Q^{-2} \xrightarrow{d_Q^{-2}} Q^{-1} \xrightarrow{d_Q^{-1}} Q^0 \xrightarrow{q^0} M \to 0$ est une résolution projective de M. Si dans $\mathcal{K}^b(\text{mod}(Q))$ on avait que pour tout morphisme $f^\bullet$ tel que $H^i(f^\bullet)$ soit isomorphisme de modules pour tout $i \in \mathbb{N}$, alors $f^\bullet$ est un isomorphisme de complexes ; on aurait que $M_0{}^\bullet \cong P_M{}^\bullet$. Il faut alors construit une catégorie où cette propriété soit vraie, pour cela on va introduire le concept de catégorie localisée.

3.1 Localisation de catégories

Définition 3.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. Un **système multiplicatif** dans $\mathcal{C}$ est une famille Σ de morphismes qui vérifie les propriétés suivantes :

FR1 Si $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ sont des morphismes dans Σ, alors $gf \in \Sigma$. Pour tout objet $X \in \mathcal{C}$ on a $1_x \in \Sigma$.

FR2 Soient $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ et $f : X \to Y$ et $s : Z \to Y$ morphismes tels que $s \in \Sigma$. Il existe $g : W \to Z$ et $t : W \to X$ des morphismes tels que $t \in \Sigma$ et $sg = ft$. De façon duale, si $f : Y \to X$ et $s : Y \to Z$ sont des morphismes avec $s \in \Sigma$, il existe $g : Z \to W$ et $t : X \to W$ avec $t \in \Sigma$ et $tf = gs$.

FR3 Pour tout morphismes $f : X \to Y$, $g : X \to Y$, on a l'équivalence

(a) Il existe $s : Y \to Y'$ dans Σ tel que $sf = sg$.

(b) Il existe $t : X' \to X$ dans Σ tel que $ft = gt$.

Supposons en plus que $\mathcal{C}$ est une catégorie triangulée. On dit que qu'un système multiplicatif Σ de $\mathcal{C}$ est compatible avec la triangulation s'il satisfait en plus

FR4 $s \in \Sigma$ si et seulement si $T(s) \in \Sigma$.

FR5 Soient (X, Y, Z, u, v, w) et (X', Y', Z', u', v', w') deux triangles et $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ morphismes dans Σ tels que $u'f = gu$. Alors il existe un morphisme $h : Z \to Z'$ dans Σ tel que (f, g, h) soit un morphisme de triangles.

Exemple 3.1. Considérons la catégorie $\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$. On dit qu'un morphisme de complexes $f^\bullet$ est un quasi-isomorphisme si $H^i(f^\bullet)$ est un isomorphisme pour tout i. On définit $\Sigma_{\Bbbk Q}$ comme l'ensemble de tous les quasi-isomorphismes dans $\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$. Notons que cet ensemble est bien défini, si $f^\bullet \sim g^\bullet$ et $f^\bullet$ est un quasi-isomorphisme, comme $H^i(f^\bullet) = H^i(g^\bullet)$, $g^\bullet$ l'est aussi. On démontre que $\Sigma_{\Bbbk Q}$ est un système multiplicatif compatible avec la triangulation de $\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$.

FR1 Cela suit du fait que H^i est un foncteur.

FR4 Soit $f^\bullet$ un morphisme de complexes, comme $T(f^\bullet)$ consiste juste à décaler de degré les morphismes f^i, on a clairement que $f^\bullet$ est un quasi-isomorphisme si et seulement si $T(f^\bullet)$ l'est.

FR5 Soient $(X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet, u^\bullet, v^\bullet, w^\bullet)$ et $(X'^\bullet, Y'^\bullet, Z'^\bullet, u'^\bullet, v'^\bullet, w'^\bullet)$ deux triangles et $f^\bullet : X^\bullet \to X'^\bullet$, $g^\bullet : Y^\bullet \to Y'^\bullet$ deux morphismes dans $\Sigma_{\Bbbk Q}$ tels que $u'^\bullet f^\bullet = g^\bullet u^\bullet$. Alors il existe $h^\bullet$ tel que $(f^\bullet, g^\bullet, h^\bullet)$ est un morphisme de triangles. On sait en plus que H^i est un foncteur cohomologique pour tout i, on obtient le diagramme commutatif à lignes exactes suivant

$$\begin{tikzcd}
H^i(X^\bullet) \arrow[r, "H^i(u^\bullet)"] \arrow[d, "H^i(f^\bullet)"] & H^i(Y^\bullet) \arrow[r, "H^i(v^\bullet)"] \arrow[d, "H^i(g^\bullet)"] & H^i(Z^\bullet) \arrow[r, "H^i(w^\bullet)"] \arrow[d, "H^i(h^\bullet)"] & H^i(T(X^\bullet)) \arrow[r, "H^i(T(u^\bullet))"] \arrow[d, "H^i(T(f^\bullet))"] & H^i(T(Y^\bullet)) \arrow[d, "H^i(T(g^\bullet))"] \\
H^i(X'^\bullet) \arrow[r, "H^i(u'^\bullet)"] & H^i(Y'^\bullet) \arrow[r, "H^i(v'^\bullet)"] & H^i(Z'^\bullet) \arrow[r, "H^i(w'^\bullet)"] & H^i(T(X'^\bullet)) \arrow[r, "H^i(T(u'^\bullet))"] & H^i(T(Y'^\bullet))
\end{tikzcd}$$

D'après le lemme des cinq, on déduit que $h^\bullet$ est un quasi-isomorphisme.

FR2 Soit $f^\bullet : Z^\bullet \to X^\bullet$ et $s^\bullet : X'^\bullet \to X^\bullet$ morphismes tels que $s^\bullet$ soit un quasi-isomorphisme. D'après TR1 et TR2 on sait qu'il existe des triangles $(X^\bullet, Y^\bullet, T(Z^\bullet), u^\bullet, v^\bullet, T(f^\bullet))$ et $(X'^\bullet, Y^\bullet, u^\bullet s^\bullet, v'^\bullet, g^\bullet)$. Comme $1_{Y^\bullet}$ est un quasi-isomorphisme, d'après FR5 il existe un quasi-isomorphisme $t^\bullet : Z'^\bullet \to T(Z^\bullet)$ tel que $(s^\bullet, 1_{Y^\bullet}), t^\bullet$ soit un morphisme de triangles. On obtient le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Z'^\bullet \arrow[r, "g^\bullet"] \arrow[d, "t^\bullet"] & T(X'^\bullet) \arrow[d, "T(s^\bullet)"'] \\
T(Z^\bullet) \arrow[r, "T(f^\bullet)"] & T(X^\bullet)
\end{tikzcd}$$

d'où, en utilisant FR4, on obtient que $T^{-1}(t^\bullet)$ est un quasi-isomorphisme et $s^\bullet T^{-1}(g^\bullet) = f^\bullet T^{-1}(t^\bullet)$. De façon semblable, on démontre l'énoncé dual.

FR3 Soit $h^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ un morphisme de complexes. On démontre que les énoncés suivantes sont équivalents :

(a) Il existe un quasi-isomorphisme $s^\bullet : Y^\bullet \to Y'^\bullet$ tel que $s^\bullet h^\bullet = 0$.

(b) Il existe un quasi-isomorphisme $t^\bullet : X'^\bullet \to X^\bullet$ tel que $h^\bullet t^\bullet = 0$.

Supposons que (a) est satisfait. En utilisant TR1 et TR2, on peut construire un triangle $(Z^\bullet, Y^\bullet, Y'^\bullet, x^\bullet, s^\bullet, y^\bullet)$ et d'après la proposition 2.3 on a une suite exacte

$$\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))}(X^\bullet, Z^\bullet) \xrightarrow{x^\bullet \circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))}(X^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{s^\bullet \circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))}(X^\bullet, Y'^\bullet) \to$$

Le fait que $s^\bullet h^\bullet = 0$ implique que $h^\bullet \in \mathrm{Ker}(s^\bullet \circ -)$. Donc il existe $z^\bullet : X^\bullet \to Z^\bullet$ tel que $x^\bullet z^\bullet = h^\bullet$. On construit un triangle $(X'^\bullet, X^\bullet, Z^\bullet, t^\bullet, z^\bullet, m^\bullet)$ et à nouveau par la proposition 2.3, on a une suite exacte

$$\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))}(Z^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{-\circ z^\bullet} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))}(X^\bullet, Y^\bullet) \xrightarrow{-\circ t^\bullet} \mathrm{Hom}_{\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))}(X'^\bullet, Y^\bullet) \to$$

On en déduit que $h^\bullet \in \mathrm{Im}(- \circ z^\bullet) = \mathrm{Ker}(- \circ t^\bullet)$ et $h^\bullet t^\bullet = 0$. Pour conclure, on regarde les suites longues de cohomologie de chaque triangle. Pour tout i on a les suites exactes

$$\cdots \to H^i(Z^\bullet) \xrightarrow{H^i(x^\bullet)} H^i(Y^\bullet) \xrightarrow{H^i(s^\bullet)} H^i(Y'^\bullet) \to \cdots$$

$$\cdots H^i(T^{-1}(Z^\bullet)) \xrightarrow{H^i(T^{-1}(m^\bullet))} H^i(X'^\bullet) \xrightarrow{H^i(t^\bullet)} H^i(X^\bullet) \xrightarrow{H^i(z^\bullet)} H^i(Z^\bullet) \to \cdots$$

Comme $s^\bullet$ est un quasi-isomorphisme on a que $H^i(Z^\bullet) = 0 = H^i(T^{-1}(Z^\bullet))$ pour tout i. D'après la deuxième suite exacte on déduit que $t^\bullet$ est quasi-isomorphisme. La preuve de l'autre implication est duale à celle-ci.

On énonce maintenant le théorème qui nous permettra rendre équivalents un module et sa résolution projective.

Théorème 3.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et Σ un système multiplicatif. Il existe une catégorie $\mathcal{C}_\Sigma$ et un foncteur $P_\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_\Sigma$ qui vérifient les propriétés suivantes :*

(i) Si $s \in \Sigma$, alors $P_\Sigma(s)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{C}_\Sigma$.

(ii) Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est un foncteur tel que $F(s)$ est isomorphisme pour tout $s \in \Sigma$, alors il existe un unique foncteur $G : \mathcal{C}_\Sigma \to \mathcal{D}$ tel que $F = GP_\Sigma$.

La catégorie $\mathcal{C}_\Sigma$ est appelée la catégorie **localisée**. On va démontrer ce théorème au long de cette section. On commence par la définition de $\mathcal{C}_\Sigma$. Soient X, Y deux objets in $\mathcal{C}$, on définit $M_\mathcal{C}(X, Y)$ comme l'ensemble de diagrammes (Z, s, f) de la forme

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & & Y \end{tikzcd}$$

avec $s \in \Sigma$. Si (Z, s, f) et (Z', s', f') sont des diagrammes dans $M_\mathcal{C}(X, Y)$, on dit que $(Z, s, f) \sim_\Sigma (Z', s', f')$ s'il existe un diagramme $(W, t, g) \in M_\mathcal{C}(X, Y)$ et morphismes $p : W \to Z$, $p' : W \to Z'$ tels que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X & W \arrow[l, dashed, "t"'] \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[u, dashed, "p"'] \arrow[d, dashed, "p'"] & Y \\ & Z' \arrow[ul, "s'"] \arrow[ur, "f'"'] & \end{tikzcd}$$

Lemme 3.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et Σ un système multiplicatif. La relation $\sim_\Sigma$ est une relation d'équivalence dans l'ensemble $M_\mathcal{C}(X,Y)$ pour tout objet $X, Y \in \mathcal{C}$.*

Démonstration. Voir [2][Chapitre I, Lemme 1.5]. □

On aimerait définir une opération de composition dans l'ensemble $M_\mathcal{C}(X,Y)/\sim_\Sigma$. Soient α et β des éléments de $M_\mathcal{C}(X,Y)/\sim_\Sigma$ et $M_\mathcal{C}(Y,Z)/\sim_\Sigma$ représentés par (U,s,f) et (V,t,g) respectivement. D'après l'axiome FR2, il existe un objet W, $r \in \Sigma$ et un morphisme h tels que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& & W \arrow[dl, dashed, "r"'] \arrow[dr, dashed, "h"] & & \\
& U \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & V \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}$$

soit commutatif. On a que $(W, sr, gh) \in M_\mathcal{C}(X,Z)$ grâce a l'axiome FR1. Soit maintenant (U', s', f') un autre représentant de α, il existent W', $r' \in \Sigma$ et un morphisme $h' : W' \to V$ tels qu'on a un diagramme commutatif comme celui-dessus avec $(W', s'r', gh') \in M_\mathcal{C}(X,Y)$. Comme $(U,s,f) \sim_\Sigma (U',s',f')$, on a l'existence du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& & W \arrow[dl, dashed, "r"'] \arrow[ddr, dashed, "h"] & & \\
& U \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & & \\
X & T \arrow[l, dashed, "x"'] \arrow[r, dashed, "y"] \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[d, dashed, "u'"'] & Y & V \arrow[l, "t"'] \arrow[r, "g"] & Z \\
& U' \arrow[ul, "s'"] \arrow[ur, "f'"'] & & & \\
& & W' \arrow[ul, dashed, "r'"] \arrow[uur, dashed, "h'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Grâce à FR2, il existe des objets R et R' avec des morphismes $p : R \to T$, $q : R \to W$, $p' : R' \to T$ et $q' : R' \to W'$ tels que $p, p' \in \Sigma$, $rq = up$ et $r'q' = u'p'$. On peut aussi compléter $R \xrightarrow{p} T \xleftarrow{p'} R'$ en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, dashed, "k'"] \arrow[d, dashed, "k"'] & R' \arrow[r, "q'"] \arrow[d, "p'"] & W' \arrow[d, "r'"] \\
R \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & T \arrow[r, "u'"'] \arrow[d, "u"] & U' \\
W \arrow[r, "r"] & U &
\end{tikzcd}$$

avec $k \in \Sigma$. On a que $th'q'k' = f'r'q'k' = f'u'p'k' = f'u'pk = fupk = frqk = thqk$, donc d'après FR3 il existe $w : P \to Q$ tel que $h'q'k'w = hqkw$. On en déduit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & W \arrow[dl, "sr"'] \arrow[dr, "gh"] & \\
X & P \arrow[l, dashed, "xpkw"'] \arrow[r, dashed, "gh'q'k'w"] \arrow[u, dashed, "qkw"'] \arrow[d, dashed, "q'k'w"] & Z \\
 & W' \arrow[ul, "s'r'"] \arrow[ur, "gh'"'] &
\end{tikzcd}$$

D'où $(W', s'r', gh') \sim_\Sigma (W, sr, gh)$. De façon similaire, on peut démontrer que la composition ne dépend pas du représentent de β. On définit alors la composition $\beta\alpha$ comme la classe d'équivalence de (W, sr, gh) dans $M_{\mathcal{C}}(X, Z)/\sim_\Sigma$.

On vérifie maintenait que cette opération est associative. Soient $\alpha \in M_{\mathcal{C}}(X, Y)/\sim_\Sigma$, $\beta \in M_{\mathcal{C}}(Y, Z)/\sim_\Sigma$ et $\gamma \in M_{\mathcal{C}}(Z, W)/\sim_\Sigma$ représentés par (U, s, f), (U', t, g) et (U'', r, h) respectivement. Soit (V, st', gf') et (V', tr', hg') des représentants de $\beta\alpha$ et $\gamma\beta$ respectivement, construits comme avant. D'après FR2 on obtient le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[d, "f'"] & T \arrow[l, dashed, "a"'] \arrow[d, dashed, "v"] \\
U' & V' \arrow[l, "r'"]
\end{tikzcd}$$

avec $a \in \Sigma$. On a que $t'a \in \Sigma$ et on peut remplacer U par T, t' par $t'a$ et f' par $f'a$. On obtient ainsi un morphisme $v : V \to V'$ tel que $r'v = f'$. On considère maintenant des diagrammes $V \xleftarrow{p} R \xrightarrow{i} U''$ et $U \xleftarrow{p'} R' \xrightarrow{i'} V'$ avec $p, p' \in \Sigma$; tels que $gf'p = ri$, $tr'i' = fp'$ et $(R, st'r', hi)$, $(R', sp', hg'i')$ représentent les compositions $\gamma(\beta\alpha)$ et $(\gamma\beta)\alpha$ respectivement. On en déduit que $ft'p = tf'p = tr'vp$, avec $t'p \in \Sigma$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & & R \arrow[ddll, dashed, "t'p"'] \arrow[dr, dashed, "vp"] & & & \\
 & & & & V' \arrow[dl, "r'"'] \arrow[dr, "g'"] & & \\
 & U \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & U' \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & & U'' \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "h"] & \\
X & & Y & & Z & & W
\end{tikzcd}$$

On en obtient que $(R, st'p, hg'vp)$ est un représentant de $(\gamma\beta)\alpha$. D'autre part, $r(g'vp) = gr'vp = (gf')p$, donc

$$(R', sp', hg'i') \sim_\Sigma (R, st'p, hg'vp) \sim_\Sigma (R, st'r', hi)$$

ce qu'implique que $\gamma(\beta\alpha) = (\gamma\beta)\alpha$. On peut vérifier facilement que la classe d'équivalence de $(X, 1_X, 1_X)$ est l'élément unité pour la composition ainsi définie.

Définition 3.2. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et Σ un système multiplicatif. On pose $\mathcal{C}_\Sigma$ comme la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(X,Y) = M_\mathcal{C}(X,Y)/\sim_\Sigma$ avec la composition définie ci-dessus.

Démonstration du théorème 3.1. Considérons $\mathcal{C}_\Sigma$ définie comme dans 3.2. On définit le foncteur $P_\Sigma : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_\Sigma$ en étant l'identité sur les objets et pour tout morphisme $f : X \to Y$. On a que $P_\Sigma(f)$ est la classe du diagramme $(X, 1_X, f)$. Clairement, on a que $P_\Sigma(1_X)$ est l'identité de X dans $\mathcal{C}_\Sigma$ et $P_\Sigma(f)P_\Sigma(g) = P_\Sigma(fg)$. Soit $s : X \to Y$ un morphisme dans Σ et $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(X,Y)$ représenté par le diagramme $(X, s, 1_X)$. Alors $\alpha P_\Sigma(s)$ est représenté par $(X, 1_X, 1_X)$ et il existe $h : Z \to X$ dans Σ tel que (Z, sh, sh) soit le représentant de $P_\Sigma(s)\alpha$. Finalement, on voit que $(Z, sh, sh) \sim_\Sigma (Y, 1_Y, 1_Y)$ et $\alpha = P_\Sigma(s)^{-1}$.

Soit maintenant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un foncteur tel que $F(s)$ est isomorphisme pour tout $s \in \Sigma$. On définit un foncteur $G : \mathcal{C}_\Sigma \to \mathcal{D}$ tel que $G(X) = F(X)$ pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, et pour tout $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(X,Y)$ représenté par le diagramme (U, s, a), $G(\alpha) = F(a)F(s)^{-1}$. Notons que $F(s)^{-1}$ existe car $s \in \Sigma$. Soit (U', s', a') une autre représentant de α, alors il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\
X & T \arrow[l, dashed, "x"'] \arrow[r, dashed, "y"] \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[d, dashed, "u'"] & Y \\
 & U' \arrow[ul, "s'"] \arrow[ur, "a'"'] &
\end{tikzcd}$$

avec $r \in \Sigma$. On en obtient que $F(a)F(s)^{-1}F(x) = F(a)F(u) = F(a')F(u') = F(a')F(s')^{-1}F(x)$, et comme $F(x)$ est inversible dans $\mathcal{D}$, on a $F(a)F(s)^{-1} = F(a')F(s')^{-1}$. Cet raisonnement nous donne aussi que $\alpha = P_\Sigma(a)P_\Sigma(s)-1$. D'autre part, si $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(Y,Z)$ est représenté par (V, t, b) et (W, sr, bc) est le représentant correspondant à $\beta\alpha$ tel que $ar = tc$;

on a

$$G(\beta\alpha) = F(bc)F(sr)^{-1} = F(b)(F(c)F(r)^{-1})F(s)^{-1} = F(b)(F(t)^{-1}F(a))F(s)^{-1} = G(\beta)G(\alpha)$$

Finalement, pour tout morphisme $f : X \to Y$, $G(P_\Sigma(f)) = F(f)F(1_X)^{-1} = F(f)$. Supposons qu'il existe un autre foncteur $G' : \mathcal{C}_\Sigma \to \mathcal{D}$ tel que $G'P_\Sigma = F$. Comme P_Σ est contant sur les objets, on obtient que pour tout $X \in \mathcal{C}$, $G'(X) = G'(P_\Sigma(X)) = F(X) = G(X)$. Soit α un morphisme de $\mathcal{C}_\Sigma$ comme avant, on a

$$G'(\alpha) = G'(P_\Sigma(a)P_\Sigma(s)-1) = F(a)F(s)^{-1} = G(\alpha)$$

ce qui nous donne l'unicité du foncteur G. □

Dans l'exemple 3.1, on a vu que $\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$ est une catégorie équipée d'un système multiplicatif $\Sigma_{\Bbbk Q}$. On définit la **catégorie dérivée** (bornée) de $\Bbbk Q$ comme la catégorie $\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$ localisée par l'ensemble des quasi-isomorphismes. On la note $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$, et dedans on a que pour tout $\Bbbk Q$-module M de type fini ${M_0}^\bullet \cong {P_M}^\bullet$. C'est-à-dire, étudier un module M est équivalent à étudier sa résolution projective. Par contre, le théorème 3.1 nous donne une façon assez technique de construire $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$, essentiellement on a construit une catégorie où on force les quasi-isomorphismes à être inversibles. En général, on aimerait mieux connaitre la structure de $\mathcal{C}_\Sigma$ quand $\mathcal{C}$ est une catégorie $\Bbbk$-linéaire (voir A.4) et triangulée, comme l'est $\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$.

Théorème 3.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et Σ un système multiplicatif dans $\mathcal{C}$. Supposons en plus que pour tout $s \in \Sigma$ et u morphisme, $su \in \Sigma$ implique $u \in \Sigma$. Alors la catégorie localisé $\mathcal{C}_\Sigma$ est $\Bbbk$-linaire.*

Démonstration. On va construire la somme de deux morphismes α et β dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(X, Y)$, pour voir qu'elle est bien définie on suggère au lecteur de se référer à [2][Lemme 1.8]. Considérons les représentants (U, s, a) et (V, t, b) de α et β. Grâce à FR2, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & Y \\
V \arrow[rru, "b"] \arrow[d, "t"] & S \arrow[l, dashed, "v"'] \arrow[d, dashed, "u"'] & \\
X & U \arrow[l, "s"'] \arrow[ruu, "a"'] &
\end{tikzcd}$$

avec $u \in \Sigma$. Comme $su = tv$ et $su \in \Sigma$, d'après l'hypothèse on obtient que $v \in \Sigma$ aussi. On pose $\alpha + \beta$ comme la classe de $(S, su, bv + au)$ et $k\alpha$ comme la classe de (U, ks, ka) pour tout $k \in \Bbbk$. Clairement, on a que $k(\alpha + \beta) = k\alpha + k\beta$ pour tout $k \neq 0$, car $su = tv$ si et seulement $(ks)u = k(su) = k(tv) = (kt)v$. Pour le cas $k = 0$ il suffit de remarquer que l'élément neutre est la classe de $(X, 1_X, 0)$.

Regardons que cette opération est compatible avec la composition de morphismes. Considérons γ un morphisme dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(Y, W)$ représenté par (T, r, c), les compositions $\gamma\alpha$ et $\gamma\beta$ correspondent aux diagrammes

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & R \arrow[dl, dashed, "u"'] \arrow[dr, dashed, "p"] & & \\
 & U \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & & T \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "c"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & R' \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[dr, dashed, "p'"] & & \\
 & V \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "b"] & & T \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "c"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}
$$

tels que (R, su, cp) et (R', tv, cp') soient les représentants respectifs. Soit $R \xleftarrow{h} A \xrightarrow{h'} R'$ des morphismes dans Σ tels que $suh = tvh'$, comme avant, on a que $(A, suh, cph + cp'h')$ est un représentant de la classe de $\gamma\alpha + \gamma\beta$. Par contre, on a aussi que $(A, suh, auh + bvh')$ est un représentant de $\alpha + \beta$. En plus $auh + bvh' = rph + rp'h' = r(ph + p'h')$, d'où on déduit le diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & A \arrow[dl, dashed, "1_A"'] \arrow[dr, dashed, "ph + p'h'"] & & \\
 & A \arrow[dl, "suh"'] \arrow[dr, "auh + bvh'"] & & T \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "c"] & \\
X & & Y & & Z
\end{tikzcd}
$$

Donc $(A, suh, c(ph + p'h'))$ est aussi un représentant de $\gamma(\alpha + \beta)$. En plus, pour tous morphismes u, v on a $P_\Sigma(u + v) = P_\Sigma(u) + P_\Sigma(v)$.

Finalement, pour tous objets $X, Y \in \mathcal{C}$, on a le diagramme

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift right, "\iota_X"'] & X \oplus Y \arrow[l, shift right, "\pi_X"'] \arrow[r, shift left, "\pi_Y"] & Y \arrow[l, shift left, "\iota_Y"]
\end{tikzcd}
$$

tel que $\pi_X\iota_X = 1_X$, $\pi_Y\iota_Y = 1_Y$ et $\iota_X\pi_X + \iota_Y\pi_Y = 1_{X\oplus Y}$. En appliquant P_Σ a ce diagramme on voit que $X \oplus Y$ reste la somme (produit) de X et Y dans $\mathcal{C}_\Sigma$. $\square$

Lemme 3.2. *Soit $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $u' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y')$ où $\mathcal{C}$ est une catégorie $\Bbbk$-linaire. Soit $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(X, X')$ et $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(Y, Y')$ tels que $\beta P_\Sigma(u) = P_\Sigma(u')\alpha$. Alors il existe des représentants (R, s, a) de α, (S, t, b) de β et un morphisme $m : R \to S$ tel que le diagramme suivant commute :*

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] & Y \\
R \arrow[u, "s"] \arrow[r, "m"] \arrow[d, "a"'] & S \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "b"] \\
X' \arrow[r, "u'"'] & Y'
\end{tikzcd}
$$

Démonstration. Voir [2][Corollaire 1.21]. □

Théorème 3.3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive triangulée et Σ un système multiplicatif dans $\mathcal{C}$ compatible avec la triangulation de $\mathcal{C}$. Alors la catégorie localisée $\mathcal{C}_\Sigma$ est munie d'une triangulation.*

Démonstration. D'après FR4, le système multiplicatif Σ est stable par le foncteur T, donc $P_\Sigma T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_\Sigma$ est un foncteur tel que $P_\Sigma T(s)$ est inversible pour tout $s \in \Sigma$. Alors il existe $T_\Sigma : \mathcal{C}_\Sigma \to \mathcal{C}_\Sigma$ tel que $P_\Sigma T = T_\Sigma P_\Sigma$. En remplaçant T par T^{-1} on obtient un morphisme T_Σ^{-1} qui est l'inverse de T_Σ. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble de triangles de $\mathcal{C}$. On pose $\mathcal{T}_\Sigma$ la famille des triangles $(X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma)$ dans $\mathcal{C}_\Sigma$ isomorphes à l'image par P_Σ d'un triangle dans $\mathcal{C}$. Vérifions que $\mathcal{T}_\Sigma$ satisfait les axiomes de la définition 2.6.

TR1 Les propriétés (i) et (iii) se suivent automatiquement de la définition de $\mathcal{T}_\Sigma$. Soit maintenant $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(X, Y)$ représenté par (Z, s, a), alors $\alpha = P_\Sigma(a)P_\Sigma(s)^{-1}$. Comme $\mathcal{C}$ est triangulée, il existe un triangle (Z, Y, W, a, b, c), on obtient le diagramme commutatif dans $\mathcal{C}_\Sigma$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] & Y \arrow[r, "P_\Sigma(b)"] & W \arrow[r, "T_\Sigma P_\Sigma(s) P_\Sigma(c)"] & T_\Sigma(X) \\
Z \arrow[u, "P_\Sigma(s)"] \arrow[r, "P_\Sigma(a)"] & Y \arrow[u, equal] \arrow[r, "P_\Sigma(b)"] & W \arrow[u, equal] \arrow[r, "P_\Sigma(c)"] & T_\Sigma(X) \arrow[u, "T_\Sigma(P_\Sigma(s))"']
\end{tikzcd}$$

Comme $P_\Sigma(s)$ et $T_\Sigma(P_\Sigma(s))$ sont des isomorphismes dans $\mathcal{C}_\Sigma$ on obtient que $(X, Y, W,$
$\alpha, P_\Sigma(b), T_\Sigma P_\Sigma(s) P_\Sigma(c))$ est dans $\mathcal{T}_\Sigma$.

TR2 Cette propriété suit automatiquement de celle de la triangulation de $\mathcal{C}$ et de la définition de $\mathcal{T}_\Sigma$.

TR3 Soient $(X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma)$ et $(X', Y', Z', \alpha', \beta', \gamma')$ des triangles dans $\mathcal{T}_\Sigma$. Il existe des triangles (A, B, C, u, v, w) et (A', B', C', u', v', w') de $\mathcal{C}$ tels que les diagrammes de $\mathcal{C}_\Sigma$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\xi"'] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta"] & Z \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\zeta"] & T_\Sigma(X) \arrow[d, "T_\Sigma(\xi)"] \\
A \arrow[r, "P_\Sigma(u)"] & B \arrow[r, "P_\Sigma(v)"] & C \arrow[r, "P_\Sigma(w)"] & T_\Sigma(A)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\xi'"'] & Y' \arrow[r, "\beta'"] \arrow[d, "\eta'"] & Z' \arrow[r, "\gamma'"] \arrow[d, "\zeta'"] & T_\Sigma(X') \arrow[d, "T_\Sigma(\xi')"] \\
A' \arrow[r, "P_\Sigma(u')"] & B' \arrow[r, "P_\Sigma(v')"] & C' \arrow[r, "P_\Sigma(w')"] & T_\Sigma(A')
\end{tikzcd}$$

soient commutatifs et (ξ, η, ζ), (ξ', η', ζ') soient des isomorphismes de sextuples. Supposons qu'il existe $\phi : X \to X'$ et $\psi : Y \to Y'$ tels que $\psi\alpha = \alpha'\phi$, alors on a que $\eta'\psi\eta^{-1}P_\Sigma(u) = P_\Sigma(u')\xi'\phi\xi^{-1}$. D'après le lemme 3.2 on peut trouver un représentant (R, s, a) de $\xi'\phi\xi^{-1}$, un représentant (S, t, b) de $\eta'\psi\eta^{-1}$, et un morphisme $m \in \mathrm{Hom}_\mathcal{C}(R, S)$, tels que le diagramme suivant de $\mathcal{C}$ soit commutatif

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "u"] & B \arrow[r, "v"] & C \arrow[r, "w"] & T_\Sigma(A') \\
R \arrow[u, "s"] \arrow[d, "a"'] \arrow[r, "m"] & S \arrow[u, "t"'] \arrow[d, "b"] & & T(R) \arrow[u, "T(s)"] \arrow[d, "T(a)"'] \\
A' \arrow[r, "u'"] & B' \arrow[r, "v'"] & C' \arrow[r, "w'"] & T_\Sigma(A')
\end{tikzcd}
$$

D'après les axiomes $TR1$ et $TR3$ de la triangulation de $\mathcal{C}$ il existe une triangle (R, S, M, m, n, p) et des morphismes $r : M \to C$, $c : M \to C'$ tels que (s, t, r) et (a, b, c) soient des morphismes de sextuples de $\mathcal{C}$. En plus, comme Σ est compatible avec la triangulation de $\mathcal{C}$, FR5 implique que $r \in \Sigma$. Soit $\rho \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_\Sigma}(C, C')$ représenté par (M, r, c). Alors le morphisme $\theta = \zeta' \rho \zeta$ fait de (ϕ, ψ, θ) un morphisme de sextuples.

TR4 La démonstration de cet axiome est similaire à celle de TR3. Il faut utiliser le lemme 3.2.

$\square$

On en obtient que $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$ est une catégorie additive et triangulée, où il est équivalant étudier un module et sa résolution projective.

3.2 Description de $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$

On note $\mathrm{proj}(Q)$ la catégorie de $\Bbbk Q$-modules projectifs à droite de type fini, avec $\mathrm{Hom}_{\mathrm{proj}(Q)}(P, Q) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}(Q)}(P, Q)$ pour tout $P, Q \in \mathrm{proj}(Q)$. On a que $\mathrm{proj}(Q)$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{mod}(Q)$, et dans le cas où Q est un carquois fini sans cycles orientés, $\mathrm{proj}(Q)$ est stable par extensions. Le théorème 1.6 implique que le noyau d'un morphisme $f : P \to Q$ dans $\mathrm{proj}(Q)$ reste dans cette catégorie car $\mathrm{Ker}\, f \subset P$.

On peut aussi considérer la catégorie de complexes bornés de modules projectifs $\mathcal{C}^b(\mathrm{proj}(Q))$ et la catégorie $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$. Comme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^b(\mathrm{proj}(Q))}(P^\bullet, Q^\bullet) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))}(P^\bullet, Q^\bullet)$$

pour tous complexes $P^\bullet, Q^\bullet$, on a que $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$ est une sous-catégorie de $\mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$. Notons que l'automorphisme T défini dans l'exemple 2.3 reste un automorphisme de $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$ et pour tout $f^\bullet : P^\bullet \to Q^\bullet$ morphisme dans $\mathcal{C}^b(\mathrm{proj}(Q))$, on a que ${C_f}^\bullet$ est encore un complexe de modules projectifs. On en obtient que $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$ est une catégorie triangulée.

On note $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}(Q))$ la catégorie localisée de $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$ par les quasi- isomorphismes de complexes de modules projectifs. Le foncteur inclusion $I : \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q)) \to \mathcal{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$ induit un morphisme $P_\Sigma I : \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q)) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$ tel que pour tout quasi-isomorphisme $s^\bullet$ on a que $P_\Sigma I(s^\bullet)$ est isomorphisme. Soit $P_\Sigma^{proj} : \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q)) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}(Q))$ le morphisme de localisation de $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$, d'après le théorème 3.1 il existe $I_\Sigma : \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}(Q)) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$ tel que $I_\Sigma P_\Sigma^{proj} = P_\Sigma I$.

Dans cette section on va démontrer que $\mathscr{K}^b(\mathrm{proj}(Q)) \cong \mathscr{D}^b(\mathrm{proj}(Q))$ et que $I_\Sigma P_\Sigma^{proj}$ est une équivalence de catégories.

Proposition 3.1. *Soit $Y^\bullet$ un complexe borné tel que $H^k(Y^\bullet) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si $X^\bullet \in \mathscr{C}^b(\mathrm{proj}(Q))$, alors $\mathrm{Hom}_{\mathscr{K}^b(\mathrm{mod}(Q))}(X^\bullet, Y^\bullet) = 0$.*

Démonstration. Comme $Y^\bullet$ est borné on peut supposer que $Y^i = 0$ pour tout $i > 0$. On doit trouver des $k^i : X^i \to Y^{i-1}$ tels que $d_Y^{i-1}k^i + k^{i+1}d_X^i = f^i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et $f^\bullet \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^b(\mathrm{mod}(Q))}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Fixons $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$, clairement $k^i = 0$ pour tout $i > 1$. On suppose qu'il existe $p \leq 1$ tel que k^q est déjà construit pour tout $q \geq p$ et qui satisfait la propriété souhaitée.

On va définir k^{p-1}. Soit $x \in X^{p-1}$, alors

$$\begin{aligned} d_Y^{p-1}\left(f^{p-1}(x) - k^p d_X^{p-1}(x)\right) &= d_Y^{p-1}f^{p-1}(x) - (d_Y^{p-1}k^p)d_X^{p-1}(x) \\ &= d_Y^{p-1}f^{p-1}(x) - \left(f^p - k^{p+1}d_X^p\right)d_X^{p-1}(x) \\ &= d_Y^{p-1}f^{p-1}(x) - f^p d_X^{p-1}(x) = 0 \end{aligned}$$

Donc $f^{p-1}(x) - k^p d_X^{p-1}(x)$ est dans le noyau de d_Y^{p-1}. Comme $H^{p-1}(Y^\bullet) = 0$ il existe $y \in Y^{p-2}$ tel que $d_Y^{p-2}(y) = f^{p-1}(x) - k^p d_X^{p-1}(x)$. S'il existe $y' \in Y^{p-2}$ tel que $d_Y^{p-2}(y') = f^{p-1}(x) - k^p d_X^{p-1}(x)$ alors $y - y' \in \mathrm{Ker}\, d_Y^{p-2}$. On définit $k : X^{p-1} \to Y^{p-2}/\,\mathrm{Ker}\, d_Y^{p-2}$ donné par $k(x) = \overline{y}$, qui est bien défini et satisfait $d_Y^{p-2}k + k^p d_X^{p-1} = f^{p-1}$. Soit π la projection canonique de Y^{p-2} sur $Y^{p-2}/\,\mathrm{Ker}\, d_Y^{p-2}$, comme X^{p-1} est un module projectif, il existe $k^{p-1} : X^{p-1} \to Y^{p-2}$ tel que $\pi k^{p-1} = k$, et ce morphisme satisfait $d_Y^{p-2}k^{p-1} + k^p d_X^{p-1} = f^{p-1}$.

□

Lemme 3.3. *Soit $u^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ un quasi-isomorphisme de complexes dans $\mathscr{C}^b(\mathrm{proj}(Q))$. Alors il existe $v^\bullet : Y^\bullet \to X^\bullet$ tel que $u^\bullet v^\bullet \sim 1_{Y^\bullet}$ et $v^\bullet u^\bullet \sim 1_{X^\bullet}$ dans $\mathscr{C}^b(\mathrm{proj}(Q))$.*

Démonstration. Comme H^k est un foncteur cohomologique pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $u^\bullet$ est un quasi-isomorphisme, on a que $H^k({C_u}^\bullet) = 0$ pour tout k. Considérons le triangle standard dans $\mathscr{K}^b(\mathrm{mod}(Q))$

$$X^\bullet \xrightarrow{u^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{{\iota_Y}^\bullet} {C_f}^\bullet \xrightarrow{{\pi_{T(X)}}^\bullet} T(X^\bullet)$$

définie dans l'exemple 2.4. D'après la proposition 3.1 on a que $\iota_{Y^\bullet}$ est homotope à zéro, c'est-à-dire qu'il existe des morphismes $k^i : Y^i \to X^i \oplus Y^{i-1}$ tels que $\iota_Y^i = d_{C_u}^i k^i + k^{i+1}d_Y^i$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$. On définit $v^i = \pi_{T(X)}^{i-1}k^i$ qui est une application de Y^i vers X^i. En plus, on a que

$$\begin{aligned} d_X^i v^i = d_X^i \pi_{T(X)}^{i-1}k^i &= -\pi_{T(X)}^i d_{C_u}^{i-1}k^i \\ &= -\pi_{T(X)}^i(\iota_Y^i - k^{i+1}d_Y^i) = \pi_{T(X)}^i k^{i+1}d_Y^i = v^{i+1}d_Y^i \end{aligned}$$

Alors $v^\bullet : Y^\bullet \to X^\bullet$ est un morphisme de complexes. Considérons les morphismes $\pi_Y^i : X^{i+1} \oplus Y^i \to Y^i$ et posons $h^i : Y^i \to Y^{i-1}$ définit par $h^i = \pi_Y^{i-1}k^i$. On en déduit que

$$1_Y^i = \pi_Y^i \iota_Y^i = \pi_Y^i(d_{C_u}^i k^i + k^{i+1}d_Y^i) = \pi_Y^i d_{C_u}^i k^i + h^{i+1}d_Y^i$$

Mais d'après la définition de ${d_{C_u}}^\bullet$, on a que $\pi_Y^i d_{C_u}^i k^i = u^i k^i + d_Y^{i-1}h^i$. Ceci entraine que $1_Y^i - u^i v^i = d_Y^{i-1}h^i + h^{i+1}d_Y^i$, c'est-à-dire $u^\bullet v^\bullet \sim {1_Y}^\bullet$.

Rappelons que $H^k(u^\bullet v^\bullet) = H^k(1 - Y^\bullet)$ pour tout k, ce qui implique que $v^\bullet$ est un quasi-isomorphisme aussi. En appliquant $v^\bullet$ le même raisonnement que précédemment, on obtient $w^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ tel que $w^\bullet v^\bullet \sim 1_{X^\bullet}$. On en déduit que $w^\bullet \sim u^\bullet$ et $u^\bullet v^\bullet \sim 1_{X^\bullet}$. $\square$

Théorème 3.4. *Le foncteur de localisation $P_\Sigma^{proj} : \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q)) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}(Q))$ est un isomorphisme de catégories.*

Démonstration. Le lemme 3.3 entraine tout quasi-isomorphisme dans $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$ est inversible, donc d'après le théorème 3.1 il existe foncteur $G : \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}(Q)) \to \mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$ tel que $1_{\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))} = GP_\Sigma^{proj}$. On a aussi que $(P_\Sigma^{proj}G)P_\Sigma^{proj} = P_\Sigma^{proj}$, donc la propriété universelle de P_Σ^{proj} implique que $P_\Sigma^{proj}G = 1_{\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}(Q))}$. $\square$

Proposition 3.2. *Considérons le foncteur $I_\Sigma : \mathcal{D}^b(\mathrm{proj}(Q)) \to \mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$ définit . Alors I_Σ est pleinement fidèle.*

Démonstration. Soit $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{C}^b(\mathrm{proj}(Q))$, on va montrer qu'on a une bijection entre $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}(Q))}(X^\bullet, Y^\bullet)$ et $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))}(X^\bullet, Y^\bullet)$. Soit $\alpha, \beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))}(X^\bullet, Y^\bullet)$ représentés par $(U^\bullet, s^\bullet, a^\bullet)$ et $(V^\bullet, t^\bullet, b^\bullet)$, avec $U^\bullet, V^\bullet$ des complexes dans $\mathcal{C}^b(\mathrm{proj}(Q))$ et $s^\bullet, t^\bullet$ des quasi-isomorphismes. Supposons que $I_\Sigma(\alpha) = I_\Sigma(\beta)$, alors il existe un complexe $T^\bullet \in \mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$ et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & U^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"'] \arrow[dr, "a^\bullet"] & \\
X^\bullet & T^\bullet \arrow[l, dashed, "x^\bullet"'] \arrow[r, dashed, "y^\bullet"] \arrow[u, dashed, "u^\bullet"'] \arrow[d, dashed, "v^\bullet"] & Y^\bullet \\
 & V^\bullet \arrow[ul, "t^\bullet"] \arrow[ur, "b^\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

avec $x^\bullet$ un quasi-isomorphisme. D'après la preuve du Lemme 3.3, il existe $h^\bullet : X^\bullet \to T^\bullet$ tel que $x^\bullet h^\bullet \sim 1_{X^\bullet}$, c'est-à-dire, $x^\bullet h^\bullet$ est un quasi-isomorphisme dans $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$. On obtient le diagramme commutatif dans $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$

$$\begin{tikzcd}
 & U^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"'] \arrow[dr, "a^\bullet"] & \\
X^\bullet & X^\bullet \arrow[l, dashed, "x^\bullet h^\bullet"'] \arrow[r, dashed, "y^\bullet h^\bullet"] \arrow[u, dashed, "u^\bullet h^\bullet"'] \arrow[d, dashed, "v^\bullet h^\bullet"] & Y^\bullet \\
 & V^\bullet \arrow[ul, "t^\bullet"] \arrow[ur, "b^\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $\alpha = \beta$ dans $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}(Q))$.

Soit maintenant $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))}(X^\bullet, Y^\bullet)$ représenté, par $(Z^\bullet, s^\bullet, b^\bullet)$ avec $Z^\bullet$ un complexe dans $\mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$. À nouveau on obtient $t^\bullet : X^\bullet \to Z^\bullet$ tel que $s^\bullet t^\bullet$ soit un quasi-isomorphisme. Soit α le morphisme dans $\mathcal{D}^b(\mathrm{proj}(Q))$ représenté par $(X^\bullet, s^\bullet t^\bullet, b^\bullet t^\bullet)$, on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& Z^\bullet \arrow[dl, "s^\bullet"'] \arrow[dr, "b^\bullet"] & \\
X^\bullet & X^\bullet \arrow[l, dashed, "s^\bullet t^\bullet"'] \arrow[r, dashed, "b^\bullet t^\bullet"] \arrow[u, dashed, "t^\bullet"] \arrow[d, dashed, "1_{X^\bullet}"] & Y^\bullet \\
& X^\bullet \arrow[ul, "s^\bullet t^\bullet"] \arrow[ur, "b^\bullet t^\bullet"'] &
\end{tikzcd}$$

On en conclut que $\beta = I_\Sigma(\alpha)$. $\square$

Lemme 3.4. *Pour tout complexe borné $X^\bullet \in \mathcal{C}^b(\mathrm{mod}(Q))$, il existe un quasi-isomorphisme $\pi^\bullet : P^\bullet \to X^\bullet$ tel que $P^\bullet \in \mathcal{C}^b(\mathrm{proj}(Q))$.*

Démonstration. On construit un objet $P^\bullet$ et un épimorphisme $\pi^\bullet : X^\bullet \to P^\bullet$ qui soit un quasi-isomorphisme. Sans perte de la généralité, on va supposer que $X^i = 0$ si $i > 0$. Comme $X^\bullet$ est borné, il existe $n \leq 0$ tel que $X^m = 0$ pour tout $m < n$. Supposons que le complexe est construit jusqu'au degré k avec $k \leq 0$, et qu'il satisfait que π^q est un épimorphisme pour tout $k \leq q$ et un quasi-isomorphisme pour $k+1 \leq q$. On considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Ker}\, d_P^k \arrow[dr, "\iota"] & & & \\
& Q \arrow[u, dashed, "p"] \arrow[r, "d"] \arrow[d, dashed, "\pi"'] & P^k \arrow[r, "d_P^k"] \arrow[d, "\pi^k"'] & P^{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\pi^{k+1}"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & X^{k-1} \arrow[r, "d_X^{k-1}"] & X^k \arrow[r, "d_X^k"] & X^{k+1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

où ι est l'inclusion canonique et (Q, p, π) est le produit de $\mathrm{Ker}\, d_P^k \xrightarrow{\pi^k \iota} X^k \xleftarrow{d_X^{k-1}} X^{k-1}$. On rappel que Q est isomorphe au noyau du morphisme $d_X^{k-1} q_1 - \pi^k \iota q_2$ où $q_1 : X^{k-1} \times \mathrm{Ker}\, d_P^k \to X^{k-1}$ et $q_2 : X^{k-1} \times \mathrm{Ker}\, d_P^k \to \mathrm{Ker}\, d_P^k$ sont les projections canoniques.

On démontre que π est un épimorphisme. D'abord, on remarque que pour la propriété universelle du produit $T \subset X^k \times \mathrm{Ker}\, d_P^{k+1}$ de d_X^k et π^{k+1}, il existe une unique $h : P^k \to T$ tel que le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{tikzcd}
P^k \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, "d_P^k"] \arrow[ddr, "\pi^k"'] & & \\
& T \arrow[r, dashed, "t_1"] \arrow[d, dashed, "t_2"] & P^{k+1} \arrow[d, "\pi^{k+1}"] \\
& X^k \arrow[r, "d_X^k"] & X^{k+1}
\end{tikzcd}$$

où t_1 et t_2 sont les injections correspondantes. On suppose que h est un épimorphisme. Soit $x \in X^{k-1}$, alors $(d_X^{k-1}(x), 0) \in T$ car $0 \in \operatorname{Ker} d_P^{k+1}$ et $d_X^k(d_X^{k-1}(x)) = \pi^{k+1}(0) = 0$. Alors il existe $x' \in P^k$ tel que $h(x') = (d_X^{k-1}(x), 0)$. On obtient $(x, x') \in X^{k-1} \times P^k$ tel que $d_P^k(x') = 0$ et $d_X^{k-1}(x) = t_2(h(x')) = \pi^k(x')$. Alors $(x, x') \in Q$ est tel que $\pi(x, x') = x$.

Montrons maintenant que π^k induit un isomorphisme entre $H^k(P^\bullet)$ et $H^k(X^\bullet)$. Soit $y \in \operatorname{Ker} d_P^k$ tel que $\overline{\pi^k(x)} = 0$. Il existe $x \in X^{k-1}$ tel que $d_X^{k-1}(x) = \pi^k(y)$, on en obtient que $(x, y) \in Q$ et donc $y \in \operatorname{Im} d$, c'est-à-dire, $\overline{y} = 0$. Pour $y \in \operatorname{Ker} d_X^k$ on a que $(y, 0) \in T$. La surjectivité de h implique qu'il existe $x \in P^k$ tel que $h(x) = (y, 0)$. Comme $d_P^k(x) = t_1 h(x) = 0$ on a que $x \in \operatorname{Ker} d_P^k$ et $\pi^k(x) = t_2 h(x) = y$. Ceci démontre que $H^k(\pi)$ est un isomorphisme.

Finalement, on sait qu'il existe un module projectif de type fini P^{k-1} et un épimorphisme $h' : P^{k-1} \to Q$. On pose $d_P^{k-1} = dh'$ et $\pi^{k-1} = \pi h'$. Comme h' est surjectif, π^{k-1} reste surjectif et $\operatorname{Ker} d_P^k / \operatorname{Im} d_P^{k-1} = \operatorname{Ker} d_P^k / \operatorname{Im} d$. Comme P^k a été construit de cette façon, on a bien que h est un épimorphisme aussi.

□

Théorème 3.5. *On a une équivalence de catégories entre* $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$ *et* $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$

Démonstration. On démontre que $I_\Sigma P_\Sigma^{proj}$ est une équivalence de catégories. D'abord notons que la proposition 3.2 et le théorème 3.4 entrainent que $I_\Sigma P_\Sigma^{proj}$ est pleine et fidèle. Le lemme 3.4 implique que pour tout objet $X^\bullet$ de $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$ il existe $P^\bullet$ dans $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$ tel que $I_\Sigma P_\Sigma^{proj}(P^\bullet) \cong X^\bullet$. Ceci conclut la preuve. □

On en obtient que pour étudier la structure de $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$ il faut étudier celle de $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$. On finit le chapitre avec une proposition que nous permettre décrire en détail $DD^b(\mathrm{mod}(Q))$ pour certains carquois Q.

Proposition 3.3. *Soit Q un carquois fini sans cycles orientés. Alors, les objets indécomposables de $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$ sont – à isomorphisme près – les complexes $X^\bullet$ tels qu'il existe $i \in \mathbb{Z}$ qui satisfait $X^j = 0$ pour tout $j \neq i$ et X^i est un module indécomposable.*

Démonstration. Soit M un module indécomposable dans $\mathrm{mod}(Q)$. On considère le complexe ${M_0}^\bullet$ définit au début de ce chapitre. Soit $P^\bullet$ un complexe de modules projectifs tel qu'il existe un quasi-isomorphisme $u^\bullet : P^\bullet \to {M_0}^\bullet$. Supposons qu'il existe ${M_1}^\bullet$ et ${M_2}^\bullet$ tels que ${M_0}^\bullet = {M_1}^\bullet \oplus {M_2}^\bullet$ dans $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$. Il existe des complexes ${P_1}^\bullet$ et ${P_2}^\bullet$ dans $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$ tels que $P^\bullet = {P_1}^\bullet \oplus {P_2}^\bullet$. Comme $H^k({M_0}^\bullet) \cong H^k(P^\bullet) = H^k({P_1}^\bullet) \oplus H^k({P_2}^\bullet)$ pour tout k, on obtient que $H^k({P_1}^\bullet) = H^k({P_2}^\bullet) = 0$ pour tout $k \neq 0$ et $H^0({P_1}^\bullet) \oplus H^0({P_2}^\bullet) \cong M$. Comme M est indécomposable on peut supposer que $H^0({P_1}^\bullet) = 0$, ce qui entraine que ${P_1}^\bullet = 0$ dans $\mathcal{K}^b(\mathrm{proj}(Q))$. On conclut que $P^\bullet$ et ${M_0}^\bullet$ sont indécomposables.

Maintenant, on prend un complexe $X^\bullet$ dans $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod}(Q))$. Supposons que $X^\bullet$ est indécomposable. Comme avant, il existe $P^\bullet$ complexe de modules projectifs quasi-isomorphe à $X^\bullet$. Comme Q est fini sans cycles orientés, $\Bbbk Q$ est une algèbre héréditaire. Donc pour tout morphisme de $\Bbbk Q$-modules $f : P \to Q$ avec $P \in \mathrm{proj}(Q)$, on a que $P = \operatorname{Ker} f \oplus P'$ où $P' \cong \operatorname{Im}(f)$.

Sans perte de la généralité, on suppose que $P^i = 0$ pour tout $i < 0$. Si $P^\bullet$ est tel que $P^i = 0$ pour tout $i \neq 0$, alors P^0 est un module indécomposable et on a bien que $X^\bullet$ est de la forme souhaitée. Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que tous les complexes $Q^\bullet$ tels que $Q^i = 0$ pour tout $i < 0$ et $i > k$ sont quasi-isomorphes à un complexe $M^\bullet$ tel qu'il existe $j \in \mathbb{Z}$ qui satisfait $M^i = 0$ pour tout $i \neq j$ et M^j est un module indécomposable. Supposons que $P^\bullet$ est tel que $P^{p+1} \neq 0$. D'après la remarque précédente, on a que $P^k = \operatorname{Ker} d_P^k \oplus P'$ où $P' \cong \operatorname{Im} d_P^k$. On obtient que

$$P^\bullet = \begin{array}{c} \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P' \xrightarrow{d_P^k} P^{k+1} \longrightarrow \cdots \\ \oplus \\ \cdots \longrightarrow P^{k-1} \xrightarrow{d_P^{k-1}} \operatorname{Ker} d_P^k \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \end{array}$$

Comme $P^\bullet$ est indécomposable, il est isomorphe à une des deux lignes, et par notre hypothèse, dans les deux cas on obtient qu'il est quasi-isomorphe à un complexe $M^\bullet$ tel qu'il existe $j \in \mathbb{Z}$ qui satisfait $M^i = 0$ pour tout $i \neq j$ et M^j est un module indécomposable.

□

Exemple 3.2. Soit Q le carquois de Kronecker. D'après le théorème 3.3, tous les objets indécomposables de $\mathcal{D}^b(\operatorname{mod}(Q))$ sont les complexes isomorphes à un complexe $X^\bullet$ dont le seul X^i différent du module 0 est isomorphe à un des modules décrits dans l'exemple 1.6.

Annexe A

Catégories abéliennes

Au long de cette annexe on suppose que le lecteur connait les bases de la théorie des catégories. En cas contraire on conseil de regarder [4].

Définition A.1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, on dit que $\mathcal{C}$ est **pre-additive** si pour tout objet $X, Y \in \mathcal{C}$, il existe une opération $+$ qui fait de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un groupe abélien. On demande aussi que la composition de morphismes soit bilinéaire.

Définition A.2. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **additive** si elle est pre-additive et dedans il existent tous les produits et sommes.

Théorème A.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie additive, alors pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$, on a*

$$X \oplus Y \cong X \;\Pi\; Y$$

.

Démonstration. Voir [1][III 4.4]. □

Exemple A.1. La catégorie de groupes abéliens Ab est additive.

Définition A.3. Une catégorie $\mathcal{C}$ est dite **abélienne** si

(a) $\mathcal{C}$ est additive,

(b) Tout morphisme admet un noyau et conoyau,

(c) Tout monomorphisme est le noyau d'un morphisme,

(d) Tout épimorphisme est le conoyau d'un morphisme.

En gros, une catégorie abélienne est une catégorie qui a les mêmes propriétés qu'un catégorie de modules. Par exemple, supposons que $\mathcal{C}$ est une catégorie dont chaque objet $X \in \mathcal{C}$ soit en particulier un ensemble, alors A.3 (a) donne qu'il existe une opération bilinéaire dans X induit par le morphisme $1_X + 1_X$ où $+$ est l'opération dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$.

En particulier, si $\mathcal{A}$ est un anneau, alors la catégorie de $\mathcal{A}$-modules à droite est abélienne.

Définition A.4. Soit $\Bbbk$ un corps, une catégorie $\mathcal{C}$ est **$\Bbbk$-linéaire** si pour tout objet $X, Y \in \mathcal{C}$ on a que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est un $\Bbbk$-module et la composition de morphismes et $\Bbbk$-bilinéaire.

Exemple A.2. La catégorie $\mathrm{mod}(Q)$ est $\Bbbk$-linéaire et abélienne.

Cette types de catégories satisfont les mêmes types de propriétés que les catégories de modules. Les propositions suivantes découlent de la existence des noyaux et conoyaux dans une catégorie abélienne.

Proposition A.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et considérons le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\iota'"] & Y' \arrow[r, "\pi'"] & Z' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Alors il existe un unique $h : Z \to Z'$ tel que le dernier carré commute.

Proposition A.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et considérons le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\iota"] & Y \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r, "\iota'"] & Y' \arrow[r, "\pi'"] & Z' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Alors il existe un unique $f : X \to X'$ tel que le premier carré commute.

On rappelle les définitions de produit fibré et somme amalgamée.

Définition A.5. Soient $f_1 : X_1 \to X$, $f_2 : X_2 \to X$ deux morphismes dans $\mathcal{C}$. Un **produit fibré** de f_1 et f_2 est la donné d'un objet P et deux morphismes $p_1 : P \to X_1$ et $p_2 : P \to X_2$ tels que

(i) $f_1 p_1 = f_2 p_2$

(ii) Pour tout objet Y et morphismes $g_1 : Y \to X_1$ et $g_2 : Y \to X_2$ tels que $f_1 g_1 = f_2 g_2$ il existe un unique morphisme $g : Y \to P$ tel que $p_1 g = g_1$ et $p_2 g = g_2$.

De façon duale, soient $f_1 : X \to X_1$, $f : X \to X_2$ deux morphismes dans $\mathcal{C}$. Une **somme amalgamée** de f_1 et f_2 est la donné d'un objet Q et deux morphismes $q_1 : X_1 \to Q$ et $q_2 : X_2 \to Q$ tels que

(i) $q_1 f_1 = q_2 f_2$

(ii) Pour tout objet Y et morphismes $g_1 : X_1 \to Y$ et $g_2 : X_2 \to Y$ tels que $g_1 f_1 = g_2 f_2$ il existe un unique morphisme $g : Q \to Y$ tel que $g q_1 = g_1$ et $g q_2 = g_2$.

Proposition A.3. *Soit une catégorie $\mathcal{C}$ additive dans laquelle tout morphisme admets un noyau et conoyau. Alors tout paire de morphismes dans $\mathcal{C}$ admet un produit fibré et une somme amalgamé. En particulier, on la résultat si $\mathcal{C}$ est abélienne.*

Démonstration. Voir [1][III 5.2 et 5.6]. □

Théorème A.2. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne, alors au digramme*

$$\begin{tikzcd} & & & X_2 \arrow[d, "f_2"] & \\ 0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "f_0"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

correspond un diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "p_0"] \arrow[d, equal] & P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "f_0"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où (P, p_1, p_2) *est un produit fibré de* f_1 *et* f_2. *Réciproquement, pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "p_0'"] \arrow[d, equal] & P' \arrow[r, "p_2'"] \arrow[d, "p_1'"] & X_2 \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X_0 \arrow[r, "f_0"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

il existe un isomorphisme $f : P' \simeq P$ *tel que* $p_0 = fp_0'$, $p_1 f = p_1'$ *et* $p_2 f = p_2'$.

Démonstration. Voir [1][III 5.5]. □

Théorème A.3. *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie abélienne, alors au digramme*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & X_1 \arrow[r, "f_0"] & X_0 \arrow[r] & 0 \\ & X_2 & & & \end{tikzcd}$$

correspond un diagramme

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & X_1 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "q_1"] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "q_2"] & Q \arrow[r, "q_0"] & X_0 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

où (Q, q_1, q_2) *est une somme amalgamée de* f_1 *et* f_2. *Réciproquement, pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_2"] & X_1 \arrow[r, "f_0"] \arrow[d, "q_1'"] & X_0 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "q_2'"] & Q' \arrow[r, "q_0'"] & X_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

il existe un isomorphisme $f : Q \simeq Q'$ tel que $q_0 = q_0' f$, $fq_1 = q_1'$ et $fq_2 = q_2'$.

Démonstration. Voir [1][III 5.9]. □

Définition A.6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie abélienne et I un ensemble de morphismes. On dit que I est un **idéal** si pour tout objet $X, Y, Z \in \mathcal{C}$ on a

(a) $I(X, Y) = I \cap \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ est un sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$

(b) Pour tout $f \in I(X, Y)$ et $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$, $gf \in I(X, Z)$

(c) Pour tout $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $g \in I(Y, Z)$, $gf \in I(X, Z)$

Proposition A.4. *Soit I un idéal de la catégorie abélienne $\mathcal{C}$, alors on a un catégorie quotiente $\mathcal{C}_I$ dont les objets sont ceux de $\mathcal{C}$ et pour tout X, Y on a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_I}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)/I(X, Y)$. En plus, $\mathcal{C}_I$ est additive.*

Démonstration. Il suffit de démontrer que la composition est bien définie et elle est associative, tout le reste découle du fait que $\mathcal{C}$ est déjà une catégorie additive et que $I(X, Y)$ est sous-groupe de $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ pour tout $X, Y \in \mathcal{C}$. Soient $\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_I}(X, Y)$ et $\bar{g} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_I}(Y, Z)$. Prenons $f' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ tels que $\bar{f} = \bar{f'}$ et $barg = \bar{g'}$, alors il existe $\iota \in I(X, Y)$ et $\kappa \in I(Y, Z)$ tels que $f' = f + \iota$ et $g' = g + \kappa$. Cela entraine que $g'f' = gf + g\iota + \kappa f + \kappa\iota$. Comme I est idéal, $g\iota + \kappa f + \kappa\iota \in I$ et $\overline{g'f'} = \overline{gf}$. On en obtient que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_I}(X, Y)$ est muni d'une composition. De la même façon, on obtient que la composition est associative et $\mathcal{C}_I$ est une catégorie. □

Bibliographie

[1] Ibrahim Assem. *Algèbres et modules : Cours et exercices.* Masson, 1997.

[2] Armand Borel. *Algebraic D-modules*, volume 2. Academic Pr, 1987.

[3] Dieter Happel. *Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras*, volume 119. Cambridge University Press, 1988.

[4] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Springer Science & Business Media, 2013.

[5] Ralph Schiffler. *Quiver Representations.* CMS Books in Mathematics. Springer International Publishing, 2014.