

# ALGÈBRES DE HALL MOTIVIQUES ET DIAGRAMMES DE DIFFUSION

**Monica Garcia**

## **Encadrant**

Pierre-Guy Plamondon  
Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

*Mémoire*

*M2 Arithmétique, Analyse et Géométrie*

Université Paris-Saclay, 2020  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématiques d'Orsay

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Champs Algébriques</b>	<b>2</b>
1.1	Définitions et premiers exemples . . . . .	2
1.1.1	2-catégories . . . . .	2
1.1.2	Topologies de Grothendieck . . . . .	3
1.1.3	Champs . . . . .	5
1.2	Propriétés des champs . . . . .	10
1.2.1	Algébricité . . . . .	10
1.2.2	Sous-champs . . . . .	12
<b>2</b>	<b>L'algèbre de Hall motivique</b>	<b>14</b>
2.1	Le champ des représentations . . . . .	14
2.2	L'algèbre $H(Q, I)$ . . . . .	21
2.2.1	Invariants motiviques . . . . .	24
2.3	L'algèbre de Lie $\hat{H}(Q, I)$ . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Le diagramme de diffusion de Hall</b>	<b>30</b>
3.1	Diagrammes de diffusion . . . . .	30
3.1.1	Résultat de reconstruction . . . . .	33
3.2	Conditions de stabilité . . . . .	35
3.2.1	Lien avec les diagrammes de diffusion . . . . .	40
3.3	Représentations encadrées et fonctions theta . . . . .	41
3.3.1	Le champ de représentations encadrées . . . . .	44
3.3.2	Fonctions theta . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Algèbres quantiques</b>	<b>47</b>
4.1	L'algèbre $U_q(\mathfrak{n}_+(\Delta))$ . . . . .	47
4.2	L'algèbre $\mathcal{H}_k(Q)$ . . . . .	48



# Introduction

La première version des algèbres de Hall a été introduite par Ringel dans les années 1990, et a permis de créer un lien entre la théorie des représentations des carquois et les algèbres de Lie via les algèbres quantiques. Par ailleurs, bien que les diagrammes de diffusion soient apparus pour la première fois dans le contexte de la symétrie miroir, ils se sont avérés essentiels pour démontrer des résultats cruciaux sur les algèbres amassées. Un lien entre les algèbres de Hall et les diagrammes de diffusion fut découvert par Tom Bridgeland dans [2] au moyen des conditions de stabilité de A. King ([11]) et l'algèbre de Hall motivique introduite par D. Joyce ([10]).

Le but de ce mémoire est de servir d'étude étendue des idées introduites dans [2]. Pour ce faire, le premier chapitre est entièrement dédié à une introduction aux champs algébriques, ce qui nous permettra de mieux comprendre un des objets centraux dans les travaux de T. Bridgeland : le **champ de représentations**  $\mathcal{M}$  associé à un carquois à relations  $(Q, I)$ . Dans le deuxième chapitre, on démontre quelques propriétés du champ  $\mathcal{M}$ , on introduit la notion d'**invariant motivique**, et on construit l'**algèbre de Hall motivique**  $H(Q, I)$  associée à un carquois à relations.

Le troisième chapitre se centre sur les résultats obtenus dans [2]. On fait une courte introduction aux **diagrammes de diffusion** comme décrits par Bridgeland et on reprend l'étude des conditions de stabilité à la King. On inclut quelques démonstrations sur la structure de la catégorie  $\text{mod}(Q, I)$  des représentations d'un carquois, indispensables pour la démonstration du théorème 3.2, qui établit le lien entre  $H(Q, I)$  et les diagrammes de diffusion.

Finalement, dans le dernier chapitre on revisite les idées des travaux de Ringel sur les algèbres de Hall, dans l'idée de montrer comment  $H(Q, I)$  sert comme une généralisations de ces objets.

# Chapitre 1

## Champs Algébriques

Un des objets centraux dans les travaux de T. Bridgeland est le champ de représentations associé à un carquois avec relations  $(Q, I)$ . Cet objet comprend toutes les représentations paramétrées par des schémas et nous permettra de calculer l'algèbre de Hall motivique. Cependant, il n'existe pas beaucoup de références qui traitent des bases de ce sujet dirigées pour les théoriciens de représentations. Dans ce premier chapitre, on présente une courte introduction aux champs algébriques.

### 1.1 Définitions et premiers exemples

#### 1.1.1 2-catégories

Dans ce qui suit, on introduit le concept de 2-catégorie, pour un traitement plus étendu de ces objets on recommande [6, Appendix B] ou [14, Section 4.29].

**Définition 1.1.** Une *2-catégorie*  $\mathcal{C}$  est une catégorie enrichie ([1, Section 2.2]) sur les catégories. En particulier, pour tous objets  $X$  et  $Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ ,  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  est une catégorie. On dit que les objets de  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  sont les 1-morphismes, et les éléments de  $\text{Hom}_{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)}(F, F')$  sont les 2-morphismes.

Le premier exemple de ce type d'objets est la catégorie des catégories  $\mathbf{Cat}$ . En effet, pour toute catégorie  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ , on connaît déjà une structure de catégorie pour  $\text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ , donnée par les transformations naturelles entre foncteurs.

On dit qu'un diagramme de 1-morphismes dans une 2-catégorie est commutatif s'il l'est à 2-isomorphisme près. Par exemple, si  $F \in \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ ,  $G \in \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{D}, \mathcal{E})$  et  $H \in \text{Hom}_{\mathbf{Cat}}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$  sont des foncteurs, on dit que le diagramme :

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{D} & \\ F \nearrow & & \searrow G \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{H} & \mathcal{E} \end{array}$$

commute, s'il existe un isomorphisme naturel  $\alpha : G \circ F \Rightarrow H$ , on le représente :

$$\begin{array}{ccc}
& & \mathcal{D} \\
& \nearrow F & \searrow G \\
\mathcal{C} & \xrightarrow{H} & \mathcal{E} \\
& & \downarrow \alpha
\end{array}$$

Tous les exemples qu'on va traiter dans ce chapitre s'inspirent de la 2-catégorie  $\mathbf{gpd} \subset \mathbf{Cat}$  des groupoïdes, dont les objets sont des catégories dont tous les morphismes sont des isomorphismes.

**Définition 1.2.** Soit  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  des 2-catégories, un 2-foncteur  $\mathcal{M}$  est la donnée de

- i) Une application  $\mathcal{M} : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{D})$  ;
- ii) pour tous objets  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{C}$  un foncteur  $\mathcal{M}_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}X, \mathcal{M}Y)$  et
- iii) pour tous objets  $X, Y$  et  $Z$  dans  $\mathcal{C}$ , ainsi que pour tous 1-morphismes  $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  et  $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$  un isomorphisme dans  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}X, \mathcal{M}Z)$  :

$$\mathcal{M}_{g \circ f} : (\mathcal{M}_{Y,Z}(g))(\mathcal{M}_{X,Y}(f)) \rightarrow \mathcal{M}_{X,Z}(g \circ f)$$

soumis à certaines conditions de compatibilité :  $\mathcal{M}$  respecte les éléments neutres des objets et 1-morphismes,  $\mathcal{M}_{g \circ f}$  est *associative* et compatible avec la composition de 2-morphismes.

On écrit souvent  $\mathcal{M}$  à la place de  $\mathcal{M}_{X,Y}$  ou  $\mathcal{M}_{g \circ f}$ , quand le contexte le permet. Cette définition est différente à celle de un foncteur habituel, on ne demande que la compositions de 1-morphismes soit respecté qu'à 2-isomorphisme près.

**Exemple 1.1.** Soient  $\mathcal{C}$  une catégorie habituelle, qu'on appelle aussi une 1-catégorie. On peut munir  $\mathcal{C}$  d'une structure de 2-catégorie en ajoutant à  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  des morphismes identités pour chaque 1-morphisme. Considérons maintenant  $\mathcal{D}$  une 2-catégorie. Un foncteur habituel  $\mathcal{M} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  en considérant  $\mathcal{D}$  comme une 1-catégorie, est aussi un 2-foncteur. En effet, soient  $X, Y$  deux objets dans  $\mathcal{C}$ , l'application

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}X, \mathcal{M}Y)$$

devient un foncteur si pour tout 1-morphisme  $f$  dans  $\mathcal{C}$ , on ait  $\mathcal{M}(Id_f) = Id_{\mathcal{M}(f)}$ . Dans cet cas, la propriété iii) de la définition est automatiquement satisfaite en posant  $\mathcal{M}_{g \circ f} = Id_{g \circ f}$ . Par contre, la réciproque n'est pas vraie, car il peut arriver que le morphisme  $\mathcal{M}_{g \circ f}$  ne corresponde pas à l'identité.

On aussi l'exemple/définition suivant :

**Définition 1.3.** Un *pré-champ* est la donnée d'un 2-foncteur contravariant  $\mathcal{M} : \mathbf{Sch}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{gpd}$ , où  $\mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}$  est la catégorie de schémas sur un corps algébriquement clos  $\mathbb{k}$ , muni de sa structure de 2-catégorie.

### 1.1.2 Topologies de Grothendieck

Soit  $X$  un espace topologique, rappelons qu'on peut voir un faisceau sur  $X$  comme un foncteur contravariant de la catégorie  $\mathbf{Op}(X)$  des ouverts de  $X$  (dont les morphismes

correspondent aux inclusions), dans la catégorie d'anneaux commutatifs  $\mathbf{CRng}$  tel que certaines conditions de recollement soient satisfaites.

L'idée derrière ces conditions vient de qu'il y a plein d'objets qu'on peut associer à un schéma en les définissant sur ses ouverts et en demandant que le recollement soit respecté : tel est le cas des morphismes, fibrés vectoriels, fibrés en groupes... Cependant, plein d'entre eux peuvent être construits avec une notion plus sophistiquée de recollement, c'est à dire, avec une généralisation de la notion de recouvrement ouvert. Pour ce faire, il faut introduire la notion de topologie dans la catégorie  $\mathbf{Sch}_k$ . Dans ce qui suit, on suppose toujours que nos anneaux sont commutatifs.

**Définition 1.4.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie, un *site* sur  $\mathcal{C}$  est une collection  $Cov(\mathcal{C})$  de familles de morphismes indexées par un ensemble  $I$

$$\{T_i \rightarrow T\}_{i \in I}$$

appelés *recouvrements* tels que :

- i) Si  $U \rightarrow T$  est un isomorphisme, alors  $\{U \rightarrow T\} \in Cov(\mathcal{C})$ .
- ii) Si  $\{T_i \rightarrow T\}_{i \in I} \in Cov(\mathcal{C})$  et pour tout  $i \in I$  on a que  $\{U_{ij} \rightarrow T_i\}_{j \in J_i} \in Cov(\mathcal{C})$  alors

$$\{U_{ij} \rightarrow T\}_{i \in I, j \in J_i} \in Cov(\mathcal{C}).$$

- iii) Si  $\{T_i \rightarrow T\}_{i \in I} \in Cov(\mathcal{C})$  et  $U \rightarrow T$  est un morphisme, alors le produit fibré  $T_i \times_T U$  existe pour tout  $i \in I$  et

$$\{T_i \times_T U \rightarrow U\}_{i \in I} \in Cov(\mathcal{C}).$$

**Exemple 1.2.** Soit  $X$  un espace topologique et  $\mathcal{C} = \mathbf{Op}(X)$  la catégorie des ouverts de  $X$ , alors  $Cov(\mathcal{C}) = \{\text{Recouvrements ouverts de } U \mid U \subset X \text{ ouvert de } X\}$  est un site.

Ainsi, donner une «topologie» sur  $\mathbf{Sch}_k$  équivaut à trouver un site, c'est-à-dire, des recouvrements. Les topologies le plus étudiées sur sont :

- i) la topologie de Zariski,
- ii) la topologie étale,
- iii) la topologie fppf (fidèlement plat de présentation finie),
- iv) la topologie fpqc (fidèlement plat et quasi-compact).

Le site associé à i) correspond à  $\mathbf{Sch}_k$  muni de la collection des recouvrements  $\{U_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  d'un schéma  $X$  par des ouverts affines  $U_i$   $i \in I$  tels que  $X = \cup_{i \in I} U_i$ . Les topologies ii) et iii) sont étudiées, par exemple, dans [6, Appendice A]. Dans cette section, on se situe sur la topologie fpqc, car elle est la plus fine des quatre [14, Lemme 34.9.6].

**Définition 1.5.** Soit  $T$  un  $k$ -schéma, et soit  $\{f_i : T_i \rightarrow T\}_{i \in I}$  une famille de morphismes où les  $T_i$  sont aussi des  $k$ -schémas pour tout  $i$ . On dit que  $\{f_i : T_i \rightarrow T\}_{i \in I}$  est un *recouvrement fpqc*, si :

- i) Pour tout  $i \in I$ ,  $f_i$  est un morphisme plat, c'est-à-dire que pour tout point  $t \in T_i$   $\mathcal{O}_{T_i, t}$  est un  $\mathcal{O}_{T, f_i(t)}$ -module plat<sup>1</sup>.

1. On rappelle que si  $A$  est un anneau et  $M$  un  $A$ -module,  $M$  est plat ssi le foncteur  $N \mapsto M \otimes_A N$  est exact.

- ii) Pour tout ouvert affine  $U \subset T$  il existe des ouverts  $U_i \subset T_i$  quasi-compacts<sup>2</sup>  $\forall i \in I$ , tous vides sauf un nombre fini, tels que  $U = \bigcup_{i \in I} f_i(U_i)$ .

La proposition suivante nous permet de voir que l'ensemble de recouvrements fpqc forme une site, qu'on appelle la *topologie fpqc*.

**Proposition 1.1.** [9, Proposition 9.2]

- i) Une immersion ouverte est plate.
- ii) Soit  $f : X \rightarrow Y$  un morphisme plat, et soit  $g : Y' \rightarrow Y$  un morphisme quelconque. Alors  $X \times_Y Y' \rightarrow Y'$  est un morphisme plat.
- iii) Soient  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow Z$  deux morphismes plats, alors  $g \circ f : X \rightarrow Z$  est un morphisme plat.
- iv) Considérons  $\varphi : A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux et soit  $f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)$  le morphisme de schémas associé. Alors  $B$  est un  $A$ -module plat ssi  $f$  est plat.

**Exemple 1.3.** Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux, alors  $\{f : \text{Spec}(B) \rightarrow \text{Spec}(A)\}$ , est un recouvrement fpqc ssi  $B$  est un  $A$ -module plat avec la structure induite par  $\varphi$  et  $f$  est surjectif. En effet, si  $U$  est un ouvert affine de  $\text{Spec}(A)$  alors  $f^{-1}(U)$  est un ouvert (quasi-compact car  $\text{Spec}(B)$  est quasi-compact car il est un schéma affine), et comme  $f$  est surjectif,  $U = f(f^{-1}(U))$ . Cette propriété est très puissante, elle est par exemple équivalente au fait que  $\varphi : A \rightarrow B$  est plat et pour tout  $A$ -module non nul  $N$ , alors le  $B$ -module  $N \otimes_A B$  est non nul (voir par exemple [14, Lemme 10.38.15]).

La proposition 1.1 i) implique également que tout recouvrement de Zariski est fpqc, car il est en particulier ouvert et les schémas affines sont quasi-compacts. Comme on avait établi avant, en fait cette topologie est la plus fine entre les topologies de Grothendieck ([14, Lemme 34.9.6]) et c'est elle sur laquelle on se baserait pour le reste de ce chapitre (sauf quelques exemples particuliers).

### 1.1.3 Champs

Considérons  $\mathcal{M} : \mathbf{Sch}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{gpd}$  un pré-champ,  $\{f_i : T_i \rightarrow T\}_{i \in I}$  un recouvrement fpqc et  $X$  un objet dans  $\mathcal{M}(T)$ . Comme  $\mathcal{M}$  est un foncteur contravariant, pour chaque morphisme  $f_i$  on a un foncteur  $\mathcal{M}(f_i) : \mathcal{M}(T) \rightarrow \mathcal{M}(T_i)$ . Pour simplifier la notations dans ce qui suit, on écrit  $X|_i = X|_{T_i} = \mathcal{M}(f_i)(X)$  et  $(X|_i)|_{ij} = \mathcal{M}(f_{ij})(X|_{T_i})$  où  $f_{ij}$  correspond à la projection  $f_{ij} : T_i \times_T T_j \rightarrow T_i$ .

**Définition 1.6.** Soit  $\mathcal{M} : \mathbf{Sch}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{gpd}$  un pré-champ, on dit que  $\mathcal{M}$  est un *champ* s'il satisfait aux conditions suivantes. Soit  $\{T_i \rightarrow T\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $T$  dans  $\mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}$ , alors

1. Si  $X$  et  $Y$  sont des objets de  $\mathcal{M}(T)$  et  $\varphi_i : X|_i \rightarrow Y|_i$  sont des morphismes tels que  $\varphi_i|_{ij} = \varphi_j|_{ij}$  pour tout  $i, j \in I$ , alors il existe  $\varphi : X \rightarrow Y$  dans  $\mathcal{M}(T)$  tel que  $\varphi|_i = \varphi_i$  pour tout  $i \in I$ .

---

2. Un espace topologique  $X$  est quasi-compact si tout recouvrement ouvert admet un raffinement fini. En français la notion de compacité est réservé pour des espaces topologiques Hausdorff.



2. Si  $X$  et  $Y$  sont des objets de  $\mathcal{M}(T)$  et  $\varphi : X \rightarrow Y$  et  $\phi : X \rightarrow Y$  sont des morphismes tels que  $\varphi|_i = \phi|_i$  pour tout  $i \in I$ , alors  $\varphi = \phi$ .
3. Si  $X_i \in \mathcal{M}(T_i)$  sont des objets et  $\varphi_{ij} : X_j|_{ij} \rightarrow X_i|_{ij}$  sont des isomorphismes dans  $\mathcal{M}(T_i \times_T T_j)$  qui satisfait à la condition

$$\varphi_{ij}|_{ijk} \circ \varphi_{jk}|_{ijk} = \varphi_{ik}|_{ijk}$$

alors il existe un objet  $X$  dans  $\mathcal{M}(T)$  et des isomorphismes  $\varphi_i : X|_i \rightarrow X_i$  tels que  $\varphi_{ij} \circ \varphi_i|_{ij} = \varphi_j|_{ij}$ .

Les propriétés i) et ii) peuvent être résumées en demandant que pour tout schéma  $T$  et objets  $X$  et  $Y$  dans  $\mathcal{M}(T)$ , le foncteur  $\text{Iso}_T(X, Y) : \mathbf{Sch}_T \rightarrow \mathbf{Sets}$  qui à chaque schéma  $U \rightarrow T$  sur  $T$  associe l'ensemble  $\text{Hom}_{\mathcal{M}(U)}(X|_U, Y|_U)$  soit un schéma d'ensembles. Un ensemble des morphismes  $\varphi_{ij}$  qui satisfait la propriété iii) de la définition précédente sont appelés des **cocycles**.

**Exemple 1.4** (Le champ associé à un schéma). Soit  $X$  un  $\mathbb{k}$ -schéma, on écrit  $X : \mathbf{Sch}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathbf{Sets} \subset \mathbf{gpd}$  pour le (2-) foncteur contravariant qui à chaque  $T$  associe l'ensemble  $\text{Hom}_{\mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}}(T, X)$ . Soit  $\{T_i \rightarrow T\}_{i \in I}$  un recouvrement par des ouverts affines  $T_i$ , considérons  $f$  et  $g$  deux morphismes dans  $\text{Hom}_{\mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}}(X, T)$ . Comme l'ensemble de 2-morphismes entre  $f|_i$  et  $g|_i$  est non-vide ssi  $f|_i = g|_i$ , alors la condition i) de la définition 1.6 est satisfaite, car on sait que si  $f|_i = g|_i$  alors  $f = g$ . La condition ii) est aussi satisfaite car les seuls 2-morphismes sont les identités. Finalement, si  $f_i$  sont des morphismes  $f_i : T_i \rightarrow X$ , la condition iii) demande que si  $f_i|_{ij} = f_j|_{ij}$ , c'est-à-dire, si les morphismes coïncident dans les intersections  $T_i \times_T T_j = T_i \cap T_j$ , alors il existe un morphisme  $f : T \rightarrow X$  tel que  $f|_i = f_i$ , ce qui est satisfait pour un recouvrement par des ouverts affines. On en déduit que  $X$  est un champ avec la topologie de Zariski.

Ce n'est pas toujours facile de démontrer qu'un 2-foncteur est un champ; cependant, comme on a vu dans l'exemple 1.4, il en existe un bon nombre qui le sont avec la topologie de Zariski.

Soit  $\mathcal{M}$  un pré-champ et  $\{U \rightarrow T\}$  un recouvrement (fpqc), on définit la catégorie

$$\mathcal{M}(U \rightarrow T)$$

comme la catégorie dont les objets sont des couple  $(X, \varphi)$  avec  $X \in \text{Obj}(\mathcal{M}(U))$  et  $\varphi$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{M}(\pi_2)(X)$  et  $\mathcal{M}(\pi_1)(X)$  dans  $\mathcal{M}(U \times_T U)$ , où les  $\pi_i$  correspondent aux morphismes

$$\begin{array}{ccc} U \times_T U & \xrightarrow{\pi_1} & U \\ \pi_2 \downarrow & & \downarrow \\ U & \longrightarrow & T \end{array}$$

tel que la condition de cocycle soit satisfaite, c'est-à-dire tel que

$$\mathcal{M}(\pi_{1,3})(\varphi) = \mathcal{M}(\pi_{1,2})(\varphi) \circ \mathcal{M}(\pi_{2,3})(\varphi),$$

où les  $\pi_{i,j}$  correspondent aux projections de  $U \times_T U \times_T U$  vers le  $i$ -ème et  $j$ -ème facteur. Dans  $\mathcal{M}(U \rightarrow T)$ , un morphisme entre deux objets  $(X, \varphi)$  et  $(Y, \phi)$  est un morphisme  $f : X \rightarrow Y$  tel que  $\phi \circ \mathcal{M}(\pi_2)(f) = \mathcal{M}(\pi_1)(f) \circ \varphi$ . On a le critère suivant :

**Lemme 1.1.** [15, Lemme 4.25] Soit  $\mathcal{M}$  un pré-champ sur la catégorie  $\mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}$ . Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $\mathcal{M}$  est un champ avec la topologie de Zariski.
2. Si  $U \rightarrow T$  est un morphisme de  $\mathbb{k}$ -schémas affines surjectif et plat, alors le foncteur de restriction

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(T) &\rightarrow \mathcal{M}(U \rightarrow T) \\ X &\mapsto (X|_U, \varphi) \end{aligned}$$

est une équivalence de catégories. Ici,  $\varphi$  correspond au isomorphisme entre  $\mathcal{M}(\pi_1)(X|_U)$  et  $\mathcal{M}(\pi_2)(X|_U)$  donné par la propriété de pré-champ iii).

Alors  $\mathcal{M}$  est un champ avec la topologie fpqc.

**Exemple 1.5.** Soit  $X = \text{Spec}(C)$  un schéma affine, rappelons que dans l'exemple 1.4 on lui a associé un 2-foncteur qui est un champ avec la topologie de Zariski, utilisons le critère pour vérifier s'il l'est pour la topologie fpqc. Considérons  $\{U = \text{Spec}(B) \rightarrow T = \text{Spec}(A)\}$  un recouvrement fpqc de schémas affines et soit  $(f, \varphi) \in X(U \rightarrow T)$ ,  $f \in \text{Hom}_{\mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}}(U, X)$ , dont  $f^* : C \rightarrow B$  est le morphisme d'anneaux associé. La condition de cocycle de  $\varphi$ , qui comme on a vu avant est juste l'égalité de morphismes, implique que  $f \circ \pi_1 = f \circ \pi_2$ . Ceci équivaut à avoir le diagramme commutatif d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} B \otimes_A B & \xleftarrow{\pi_1^*} & B \\ \uparrow \pi_2^* & \nearrow f^* & \uparrow \\ & C & \\ \downarrow f^* & \nwarrow & \downarrow \\ B & \xleftarrow{\quad} & A \end{array}$$

c'est-à-dire, pour tout  $c \in C$ ,  $f^*(c) \otimes_A 1 = 1 \otimes_A f^*(c)$ . On sait que par définition, pour tout  $a \in A$ , qui est aussi un élément de  $B$  car  $A \rightarrow B$  est un morphisme fidèlement plat,  $a \otimes_A 1 = 1 \otimes_A a$ . Si la réciproque était vraie, on aurait que  $f^*$  se factorise par  $A$ , ce qui à la fois impliquerait le résultat.

**Lemme 1.2.** [15, Lemme 2.61] Soit  $A \rightarrow B$  un morphisme fidèlement plat, la suite

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \xrightarrow{\pi_1^* - \pi_2^*} B \otimes_A B$$

est exacte.

On en déduit que le  $X = \text{Spec}(C)$  est un champ avec la topologie fpqc, et en fait c'est le cas pour n'importe quel schéma  $X$ .

**Exemple 1.6** (Le champ quotient). Un des problèmes les plus étudiés par les géomètres algébristes est la constructions de quotients. On rappelle qu'un groupe algébrique dans  $\mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}$  est un schéma  $G$  doté des morphismes

$$\begin{aligned} e &: \mathbb{k} \rightarrow G \\ \rho &: G \rightarrow G \\ \mu &: G \times_{\mathbb{k}} G \rightarrow G \end{aligned}$$

qui satisfont aux axiomes d'un groupe. On dit que  $G$  agit sur un schéma  $T$  s'il existe

un morphisme  $T \times_{\mathbb{k}} G \xrightarrow{a} T$  qui satisfait aux propriétés d'une action de groupes habituelle.

Soit  $T$  un schéma, un  $G$ -fibré sur  $T$  est la donné d'un schéma  $E$  sur lequel  $G$  agit via  $a$ , et un morphisme  $\lambda : E \rightarrow T$  qui est  $G$ -invariant, c'est à dire  $\lambda \circ a = \pi_E$ , où  $\pi_E$  est la projection  $E \times_{\mathbb{k}} G \rightarrow E$ . On dit que  $E$  est un  $G$ -fibré **principal** dans la topologie fpqc si pour tout  $t \in T$  il existe un ouvert  $U$  qui contient  $t$  et un recouvrement fpqc  $\{U' \rightarrow U\}$  tel que on ait une isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} U' \times_U E|_U & \xrightarrow{\cong} & U' \times_{\mathbb{k}} G \\ & \searrow & \swarrow \\ & U' & \end{array}$$

Ici, le  $G$ -fibré  $U' \times_{\mathbb{k}} G \rightarrow U'$  donné par la projection sur  $U'$  est appelé le fibré trivial. Soit  $X$  un schéma sur lequel  $G$  agit à droite. On définit le 2-foncteur  $[X/G]$  par

$$[X/G] : \mathbf{Sch}_{\mathbb{k}} \longrightarrow \mathbf{gpd}$$

$$T \longmapsto \left\{ \begin{array}{c} E \xrightarrow{f} X \\ \lambda \downarrow \\ T \end{array} \middle| \begin{array}{l} \text{où } E \xrightarrow{\lambda} T \text{ est un } G\text{-fibré} \\ \text{principal et } f \text{ est un} \\ \text{morphisme equivariant} \end{array} \right\}$$

On note par  $(E, \lambda, f)$  les objets dans  $[X/G](T)$ . Un morphisme entre deux objets  $(E, \lambda, f)$  et  $(E', \lambda', f')$  est la donnée d'un isomorphisme  $\varphi : E \rightarrow E'$  tel qu'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & X \\ \lambda \downarrow & \searrow \varphi & \uparrow f' \\ T & \xleftarrow{\lambda'} & E' \end{array}$$

Remarquons que, la différence de  $X$  vu comme 2-foncteur,  $[X/G]$  ne provient pas d'un 1-foncteur : soient  $h : U \rightarrow T$  et  $g : V \rightarrow U$  deux morphismes de schémas, le foncteur  $[X/G](h)$  envoie un objet  $(E, \lambda, f)$  vers  $(U \times_T E, \pi_U, f \circ \pi_E)$ , où  $U \times_T E$  est le produit fibré de  $h$  et  $\lambda$ , de même pour le foncteur  $[X/G](g)$ . Cependant, on n'a qu'un *isomorphisme* (canonique) entre les objets  $V \times_T E$  et  $V \times_U (U \times_T E)$ , c'est-à-dire, on a une transformation naturelle entre les foncteurs  $[X/G](h \circ g)$  et  $[X/G](g) \circ [X/G](h)$ .

**Proposition 1.2.** [5, Proposition 2.1] *Soit  $X$  un schéma sur lequel agit un groupe algébrique  $G$ . Le 2-foncteur  $[X/G]$  de  $G$ -fibrés principaux fpqc est un champ sous la topologie fpqc qu'on appelle le champ quotient.*

*Idée de la preuve.* Soit  $T$  un schéma et  $\mathcal{E} = (E, \lambda, f) \in [X/G](T)$ . Un endomorphisme dans  $\mathrm{Hom}_{[X/G](T)}(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  équivaut à la donnée d'un élément de  $g \in G$  tel que  $f \circ g = f$ ; ces éléments forment un sous-groupe de  $G$  qu'on appelle le stabilisateur de  $f$ . Il se trouve que le foncteur qui envoie un  $G$ -morphisme (un morphisme équivariant entre schémas sur lequel  $G$  agit)  $g : Y \rightarrow X$  sur son stabilisateur est re-

présenté par le schéma  $\mathbf{Stab}_G(X)$ , c'est-à-dire, le sous groupe de  $G$  qui stabilise le morphisme identité  $\text{Id} : X \rightarrow X$ . On remarque ensuite que  $\text{Iso}_T(\mathcal{E}, \mathcal{E})(U \rightarrow T)$  est formé par les éléments de  $G$  qui stabilisent le morphisme  $U \times_T E \rightarrow E \rightarrow X$ , c'est-à-dire  $\text{Hom}_{\mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}}(U \times_T E, \mathbf{Stab}_G(X))$ ; on en déduit que  $\text{Iso}_T(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  est un schéma sous la topologie fpqc, car il est représenté par un schéma.

Comme pour tous objets  $\mathcal{E} = (E, \lambda, f)$  et  $\mathcal{E}' = (E', \lambda', f')$  dans  $[X/G](T)$  l'ensemble des morphismes entre eux est non vide ssi les  $G$ -fibrés sont isomorphes et il y a comptabilité entre les morphismes, on obtient qu'en fait le foncteur  $\text{Iso}_T(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$  est isomorphe au foncteur  $\text{Iso}_T(\mathcal{E}, \mathcal{E})$  qui est un schéma. Finalement, comme les  $G$ -fibrés principaux fpqc sont définis sous cette topologie, on a automatiquement la condition de recollement de cocycles. La raison pour laquelle la notion du champ quotient fut introduite est la rareté avec laquelle on peut définir un schéma quotient. On aimerait qu'à chaque fois qu'on a un groupe algébrique  $G$  qui agit sur un schéma  $X$  il existe un  $X$ -schéma, qu'on dénote  $X/G$ , qui satisfait que si  $(E, \lambda, f)$  est un objet dans  $[X/G](T)$  il existe un morphisme  $\tilde{f} : T \rightarrow X/G$  tel que on ait le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & X \\ \lambda \downarrow & & \downarrow \\ T & \xrightarrow{\tilde{f}} & X/G \end{array}$$

Quand il existe un tel schéma, on a que les champs  $[X/G]$  et  $X/G$  contiennent la même information. En effet, soit  $T$  un schéma et  $\tilde{f} : T \rightarrow X/G$  un morphisme. On a que le produit fibré  $E = T \times_{X/G} X$  donne un objet  $(E, \pi_T, \pi_X)$  qui est bien dans  $[X/G](T)$ . Réciproquement, la propriété universelle de  $X/G$  nous dit qu'à chaque fois qu'on a un objet  $\mathcal{E} \in [X/G](T)$ , on a un morphisme entre  $T$  et  $X/G$ . Formellement, on dit que ces deux champs sont *isomorphes*, ce qui nous amène à la définition suivante :

**Définition 1.7.** Soient  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$  deux champs. Un *morphisme de champs*  $\mathcal{F}$  est décrit par les données suivantes :

- i) Pour tout  $U \in \mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}$ , un foncteur  $\mathcal{F}(U) : \mathcal{M}_1(U) \rightarrow \mathcal{M}_2(U)$ .
- ii) Pour tout morphisme  $\varphi : V \rightarrow U$ , un isomorphisme de foncteurs  $\mathcal{F}_\varphi : \mathcal{F}(V) \circ \mathcal{M}_1(\varphi) \rightarrow \mathcal{M}_2(\varphi) \circ \mathcal{F}(U)$ , c'est à dire, on veut que  $\mathcal{F}$  satisfait au diagramme commutatif de 1-morphismes

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1(U) & \xrightarrow{\mathcal{M}_1(\varphi)} & \mathcal{M}_1(V) \\ \mathcal{F}(U) \downarrow & \searrow \mathcal{F}_\varphi & \downarrow \mathcal{F}(V) \\ \mathcal{M}_2(U) & \xrightarrow{\mathcal{M}_2(\varphi)} & \mathcal{M}_2(V) \end{array}$$

et en plus satisfait :

- (a)  $\mathcal{F}_{\text{Id}_U} = \text{Id}_{\mathcal{F}(U)}$ ,
- (b) Si  $\phi : W \rightarrow V$  est un autre morphisme de schémas, alors pour tout  $X \in \mathcal{M}_1(U)$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\varphi \circ \phi}(X) &= \left( \mathcal{F}(W)(\mathcal{M}_{1_{\varphi \circ \phi}}(X)^{-1}) \right) \circ \left( \mathcal{F}_\phi(\mathcal{M}_1(\varphi)(X)) \right) \circ \\ &\quad \circ \left( \mathcal{M}_2(\phi)(\mathcal{F}_\varphi(X)) \right) \circ \left( \mathcal{M}_{2_{\varphi \circ \phi}}(\mathcal{F}(U)(X)) \right), \end{aligned}$$

Si chaque  $\mathcal{F}(U)$  est une équivalence de catégories, on dit que  $\mathcal{F}$  est un *isomorphisme*.

*Remarque 1.1.* Soient  $M_1$  et  $M_2$  deux champs comme dans la définition précédente et  $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \text{Hom}_{\text{St}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$ . Puisque  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  sont déterminés pour les foncteurs  $\mathcal{F}(U)$  et  $\mathcal{G}(U)$  avec  $U$  un  $\mathbb{k}$ -schéma, on peut définir une *transformation naturelle* entre  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  comme la donnée des transformations naturelles

$$\{\alpha_U : \mathcal{F}(U) \Rightarrow \mathcal{G}(U)\}_{U \in \text{Sch}_{\mathbb{k}}},$$

soumis à quelques conditions de comptabilité. Ainsi, on peut munir  $\text{Hom}_{\text{St}}(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$  d'une structure de catégorie.

**Exemple 1.7.** Considérons à nouveau un schéma  $X$  sur le quel un groupe algébrique  $G$  agit. On a un morphisme de champs  $\mathcal{F} : X \rightarrow [X/G]$  où pour chaque schéma  $U$  et  $f \in \text{Hom}_{\text{Sch}_{\mathbb{k}}}(U, X)$  on ait

$$\mathcal{F}(U)(f) = (U \times_X (X \times_{\mathbb{k}} G), \pi_U, a \circ \bar{f})$$

où  $a : X \times_{\mathbb{k}} G \rightarrow X$  correspond à l'action de  $G$  sur  $X$ , et  $\pi_U$  et  $\bar{f}$  sont issus du diagramme du produit fibré

$$\begin{array}{ccc} U \times_X (X \times_{\mathbb{k}} G) & \xrightarrow{\bar{f}} & X \times_{\mathbb{k}} G \xrightarrow{a} X \\ \pi_U \downarrow & & \downarrow \pi_X \\ U & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

Ici, si  $\varphi : V \rightarrow U$  est un morphisme de schémas,  $\mathcal{F}_{\varphi}$  correspond simplement à l'isomorphisme canonique entre les produits fibrés  $V \times_X (X \times_{\mathbb{k}} G)$  et  $V \times_U (U \times_X (X \times_{\mathbb{k}} G))$ .

## 1.2 Propriétés des champs

### 1.2.1 Algébricité

Comme on a vu dans l'exemple précédent, il peut être intéressant de comparer des champs à des schémas. Pour ce faire, dans cette section (et à chaque fois qu'on considère des champs algébriques) on considérera la topologie fppf qui est formée par des recouvrements  $\{f_i : T_i \rightarrow T\}$  tels que  $f_i$  soit un morphisme plat et de présentation finie. Tous les exemples traités dans les sections précédentes restent des champs pour cette topologie.

**Lemme 1.3.** [6, Lemme 2.18] Soit  $\mathcal{M}$  un champ et  $T$  un schéma. Le foncteur

$$F : \text{Hom}_{\text{St}}(T, \mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}(T)$$

qui à chaque morphisme de champs  $\mathcal{F} : T \rightarrow \mathcal{M}$  associe  $\mathcal{F}(T)(\text{Id}_T) \in \mathcal{M}(T)$ , est une équivalence de catégories.

Remarquons par exemple que le morphisme de schémas décrit dans l'exemple 1.7, correspond à l'objet  $\mathcal{E} = (X \times_{\mathbb{k}} G, \pi_X, a) \in [X/G](X)$ , car pour tout morphisme  $f : U \rightarrow X$  on a que  $\mathcal{F}(U)(f) = [X/G](f)(\mathcal{E}) = \mathcal{E}|_U$ .

**Définition 1.8.** Soit  $\mathcal{M}_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_1} \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_2 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} \mathcal{M}$  deux morphismes de champs, on définit le champ  $\mathcal{M}_1 \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_2$  de la façon suivante. Soit  $T$  un schéma, les objets de  $\mathcal{M}_1 \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_2(T)$  sont des triplets  $(X_1, X_2, \alpha)$ , où  $X_i \in \mathcal{M}_i(T)$  pour  $i = 1, 2$  et  $\alpha$  est un isomorphisme entre  $\mathcal{F}_1(T)(X_1)$  et  $\mathcal{F}_2(T)(X_2)$  dans  $\mathcal{M}(T)$ . Un morphisme entre deux objets  $(X_1, X_2, \alpha)$  et  $(Y_1, Y_2, \beta)$  est une paire  $(\phi_1, \phi_2)$  de morphismes  $\phi_i : X_i \rightarrow Y_i$  tel que  $\beta \circ \mathcal{F}_1(T)(\phi_1) = \mathcal{F}_2(T)(\phi_2) \circ \alpha$ . Ceci est un champs et il satisfait la propriété universel du produit fibré dans la catégorie de champs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1 \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_2 & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{M}_1}} & \mathcal{M}_1 \\ \pi_{\mathcal{M}_2} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{M}_2 & \xrightarrow{\mathcal{F}_2} & \mathcal{M} \end{array}$$

avec les morphismes projections  $\pi_{\mathcal{M}_i}(T) = \pi_{\mathcal{M}_i(T)}$ .

**Définition 1.9.** Un champ  $\mathcal{M}$  est dit *représentable par un schéma* s'il existe un schéma  $M$  tel que  $\mathcal{M}$  soit isomorphe à  $M$  en tant que champ. Si « P » est une propriété de schémas (affine, séparable, noethérien ...), on dit que  $\mathcal{M}$  a « P » ssi  $M$  l'a. D'autre part, un morphisme  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$  est dit *représentable* si pour chaque schéma  $U$  et un morphisme de champs  $U \rightarrow \mathcal{M}$ , le produit fibré  $U \times_{\mathcal{M}} \mathcal{X}$  est représentable par un schéma. Si « P » est une propriété de morphismes des schémas qui est locale sur la cible pour la topologie choisie sur  $\mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}$  et stable par changement de base, on dit que  $\mathcal{F}$  a la propriété « P », si pour tout schéma  $U$ , le morphisme  $U \times_{\mathcal{M}} \mathcal{X} \rightarrow U$  l'a.

**Exemple 1.8.** Considérons à nouveau le morphisme de champs  $\mathcal{F} : X \rightarrow [X/G]$  comme dans l'exemple 1.7 et soit  $U \rightarrow [X/G]$  un morphisme du schéma  $U$  défini par l'objet  $(E, \lambda, f)$  dans  $[X/G](U)$ . Si  $G$  est un groupe algébrique lisse, ce morphisme est représentable et un  $G$ -fibré. En effet,  $X \times_{[X/G]} U$  est isomorphe à  $E$  qui est un  $G$ -fibré au dessus de  $U$ .

**Définition 1.10** (Champ d'Artin). Soit  $\mathbf{Sch}_{\mathbb{k}}$  la catégorie de  $\mathbb{k}$ -schémas avec la topologie fppf et soit  $\mathcal{M}$  un champ. On dit que  $\mathcal{M}$  est un *champ d'Artin* (dit aussi *algébrique*), si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i) Le morphisme diagonal  $\Delta_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} \times_{\mathbb{k}} \mathcal{M}$  est représentable, quasi-compact et séparé.
- ii) Il existe un schéma  $M$ , qu'on appelle l'atlas, et un morphisme lisse et surjectif  $M \rightarrow \mathcal{M}$ .

*Remarque 1.2.* La condition i) de la définition précédente peut être énoncée de plusieurs façons : une qui sera utile pour la suite c'est que le morphisme  $\Delta_{\mathcal{M}}$  est représentable ssi pour tout  $\mathbb{C}$ -schéma  $T$  et objets  $X, Y \in \mathcal{M}(T)$  alors le foncteur  $\text{Iso}_T(X, Y)$  est représentable par un schéma, c'est-à-dire, il existe un schéma  $U$  tel que  $\text{Iso}_T(X, Y) \simeq \text{Hom}_{\mathbf{Sch}_{\mathbb{C}}}(-, U)$  ([6, Proposition 2.19]).

**Proposition 1.3.** [13, Proposition 3.6.4] Soit  $X$  un  $\mathbb{k}$ -schéma et  $H$  un groupe algébrique linéaire (en particulier lisse) qui agit sur  $X$ . Le champ  $[X/H]$  est un champ d'Artin avec atlas  $X \rightarrow [X/H]$  donné par le  $H$ -fibré trivial  $(X \times_{\mathbb{k}} H, \pi_X, a)$ .

*Remarque 1.3.* L'importance de la condition que  $G$  soit un groupe algébrique lisse vient du fait que, si  $G$  est lisse, un  $G$ -fibré principal dans la topologie fpqc est toujours principal sous la topologie étale (voir par exemple [8, Section 6]). Si  $G = GL_d$ , on a même que un tel  $G$ -fibré est principal sous la topologie de Zariski, mais ce n'est pas toujours le cas. On dit que  $G$  est un *groupe spécial*, si tout  $G$ -fibré principal sous la topologie étale l'est sous la topologie de Zariski.

Une grande partie des champs algébriques peuvent être comparés aux champs quotients, comme on verra avec quelques exemples, ce qui fait d'eux une classe de champs algébriques très importante. Pour l'instant, on a juste défini des propriétés schématiques pour des champs et morphismes de champs représentables. Il sera utile aussi de parler des propriétés d'un champ d'Artin, même s'il n'est pas représentable, pour ce faire on profitera de l'atlas.

**Définition 1.11.** Soit  $\mathcal{M}$  un champ algébrique et soit « P » une propriété de morphismes de schémas qui est locale pour des recouvrements lisses (régulier, normal, réduit...). On dit que  $\mathcal{M}$  a la propriété « P » si son atlas  $M$  l'a.

D'autre part, si « P » est une propriété de morphismes de schémas, qui est locale pour la base et la cible des recouvrements lisses, et si  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$  est un morphisme de champs algébriques, on dit que  $\mathcal{F}$  a la propriété « P » ssi pour tout diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\mathcal{H}} & M \times_{\mathcal{M}} \mathcal{X} & \xrightarrow{\overline{\mathcal{G}}} & \mathcal{X} \\ & \searrow \overline{\mathcal{F}} & \downarrow \overline{\mathcal{F}} & & \downarrow \mathcal{F} \\ & & M & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathcal{M} \end{array}$$

avec  $X, M$  schémas et  $\mathcal{G}, \mathcal{H}$  des morphismes de champs lisses et surjectifs, alors  $\overline{\mathcal{F}}$  a la propriété « P ».

On finit cette section avec le critère suivant :

**Lemme 1.4.** [14, Lemme 92.15.5] Soit  $\iota : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$  un morphisme de champs. Si  $\iota$  est représentable et  $\mathcal{M}$  est algébrique, alors  $\mathcal{X}$  l'est aussi.

## 1.2.2 Sous-champs

**Définition 1.12.** Un *sous-champ*  $\mathcal{N}$  d'un champ  $\mathcal{M}$  est la donnée d'un morphisme de champs  $\mathcal{F} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$  tel que

1. Pour tout  $U$  schéma,  $\mathcal{F}(U) : \mathcal{N}(U) \rightarrow \mathcal{M}(U)$  correspond l'inclusion d'une sous-catégorie pleine et stable par isomorphisme.
2. Pour tout recouvrement (dans la topologie choisi)  $\{T_i \rightarrow T\}_{i \in I}$  et  $X \in \mathcal{M}(T)$  on ait que  $X \in \mathcal{N}(T)$  ssi  $X_{T_i} \in \mathcal{N}(T_i)$  pour tout  $i$ .

Un sous-champ est ouvert (resp. fermé) si l'inclusion est un morphisme représentable et une immersion ouverte (resp. fermée).

**Exemple 1.9.** Considérons  $\mathcal{M}$  un champ d'Artin (en particulier un champ avec la topologie fppf) avec atlas  $M \rightarrow \mathcal{M}$ . Soit  $U \subset M$  un ouvert, on définit le sous-champ  $\mathcal{U}$  de la façon suivante. Soit  $T$  un schéma et  $X \in \mathcal{M}(T)$ , ceci nous donne

un morphisme de champs  $X : T \rightarrow \mathcal{M}$  d'après le lemme de Yoneda. Comme  $\mathcal{M}$  est d'Artin, on a que le produit fibré  $M \times_{\mathcal{M}} T$  est un schéma. On dit que  $X \in \mathcal{U}(T)$  si le morphisme  $M \times_{\mathcal{M}} T \rightarrow M$  se factorise par  $U$ .

Ceci est bien un sous-champ : si  $f : T \rightarrow S$  est un morphisme de schémas et si  $X \in \mathcal{U}(S) \subset \mathcal{M}(S)$ , comme

$$T \xrightarrow{f} S \xrightarrow{X} \mathcal{M} = T \xrightarrow{X|_T} \mathcal{M}$$

on obtient que  $X|_T \in \mathcal{U}(T)$ , car on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} M \times_{\mathcal{M}} T & \longrightarrow & T \\ \exists! \downarrow & & \downarrow f \\ M \times_{\mathcal{M}} S & \longrightarrow & S \\ \swarrow & \downarrow & \downarrow X \\ U & \hookrightarrow & M \longrightarrow \mathcal{M} . \end{array}$$

Pour le recollement, il se trouve que le produit fibré des schémas est déterminé par les recouvrements fpqc, et donc, si  $X \in \mathcal{M}(T)$  est un objet tel que  $X|_{U_i} \in \mathcal{U}(U_i)$  pour un recouvrement fpqc  $\{U_i \rightarrow T\}_{i \in I}$ , alors pour tout  $i \in I$  on obtient le digramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M \times_{\mathcal{M}} U_i & \longrightarrow & U \\ & \searrow & \swarrow \\ & & M \end{array}$$

associé au morphisme induit par  $X|_{U_i}$ . Ceci entraîne que le morphisme  $M \times_{\mathcal{M}} T \rightarrow M$  associé à  $X$  se factorise par  $U$ . Finalement, l'inclusion  $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{M}$  est ouverte, en effet, pour  $T$  un schéma et  $X \in \mathcal{M}(T)$ , alors  $\mathcal{U} \times_{\mathcal{M}} T$  est isomorphe à la prie-image de  $U$  via le morphisme  $M \times_{\mathcal{M}} T \rightarrow M$  associé à  $X$ , qui est ouvert car  $U$  l'est.

Soit maintenant  $\mathcal{U}$  un sous-champ ouvert de  $\mathcal{M}$ . Par définition  $\mathcal{U} \hookrightarrow \mathcal{M}$  est representable et ouvert et d'après le critère donné par le lemme 1.4 on obtient que  $\mathcal{U}$  est aussi un champ d'Artin dont un atlas est  $U = \mathcal{U} \times_{\mathcal{M}} M$ , qui peut être vu comme un sous-schéma de  $M$ . Ceci nous permet définir le sous-champs complément  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{U}$  en utilisant la construction vi ci-haut et le schéma fermé  $M \setminus U$ .



## Chapitre 2

# L'algèbre de Hall motivique

Un **carquois**  $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$  est un graphe orienté où  $Q_0$  est l'ensemble de sommets,  $Q_1$  l'ensemble de flèches et  $s$  et  $t$  sont des fonctions  $Q_1 \rightarrow Q_0$  telles que si  $\alpha \in Q_1$  est une flèche alors  $s(\alpha)$  est son point de départ et  $t(\alpha)$  son point d'arrivée :

$$s(\alpha) \xrightarrow{\alpha} t(\alpha)$$

On écrit  $\mathbb{C}Q$  pour noter la  $\mathbb{C}$ -algèbre de chemins sur  $Q$ . Un carquois à relations est une couple  $(Q, I)$  où  $Q$  est un carquois et  $I$  est un idéal de  $\mathbb{C}Q$  engendré par combinaisons linéaires de chemins de longueur  $\geq 2$ . On écrit

$$\text{rep}(Q, I) = \text{mod}(\mathbb{C}Q/I) = \text{mod}(Q, I)$$

pour noter la catégorie abélienne des représentations de  $(Q, I)$ , ou de façon équivalente, les modules à droite de dimension-finie sur l'algèbre  $\mathbb{C}Q/I$ .

*Remarque 2.1.* On pourrait avoir que  $Q_0$  ou  $Q_1$  sont infinis, ici on va supposer que les deux ensembles sont finis, dans ce cas on dit que  $Q$  est *fini*.

Dans ce chapitre on étudie le champ de représentations d'un carquois  $(Q, I)$ , qui est, en gros, un objet qui comprend toutes les représentations paramétrées par des variétés algébriques.

### 2.1 Le champ des représentations

**Définition 2.1.** Soit  $(Q, I)$  un carquois à relations fini. On définit le pré-champ  $\mathcal{M} : \mathbf{Sch}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbf{gpd}$  donné de la façon suivante. Soit  $T$  un schéma, les objets de  $\mathcal{M}(T)$  sont des paires  $(\mathcal{E}, \rho)$  où  $\mathcal{E}$  est un  $\mathcal{O}_T$ -module localement libre de type fini et

$$\rho : \mathbb{C}Q/I \rightarrow \text{End}_T(\mathcal{E})$$

est un morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres. Un morphisme entre deux objets  $(\mathcal{E}, \rho)$  et  $(\mathcal{E}', \rho')$  dans  $\mathcal{M}(T)$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_T$ -modules  $\theta : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  tel que pour tout  $\alpha \in \mathbb{C}Q/I$  on ait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{E} & \xrightarrow{\rho(\alpha)} & \mathcal{E} \\
\theta \downarrow & & \downarrow \theta \\
\mathcal{E}' & \xrightarrow{\rho'(\alpha)} & \mathcal{E}'
\end{array}$$

Soit  $f : U \rightarrow T$  un morphisme de schémas, le foncteur  $\mathcal{M}(f) : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(T)$  est donné simplement par le foncteur image inverse  $f^*$ .

**Exemple 2.1.** Considérons le schéma  $T = \text{Spec}(\mathbb{C})$  et  $(\mathcal{E}, \rho)$  un objet dans  $\mathcal{M}(T)$ . Comme  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{O}_T$ -module localement libre de type fini, il correspond en fait à un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension fini  $V$ . Considérons maintenant les éléments  $e_i \in \mathbb{C}Q/I$  indexes par  $i \in Q_0$  qui correspondent à les sommets de  $Q$ . On a que les endomorphismes  $\rho(e_i)$  se sont des idempotents dans  $\text{End}_T(\mathcal{E}) = \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$ , c'est-à-dire, des projections aux quels correspondent des sous espaces vectoriels  $V_i$  qui satisfaisaient  $\bigoplus_{i \in Q_0} V_i = V$  car  $\sum_{i \in Q_0} e_i = 1_{\mathbb{C}Q/I}$ . Finalement, pour chaque arrête  $\alpha \in Q_1$  on obtient un morphisme de espaces vectoriels  $\rho(\alpha) : V_{s(\alpha)} \rightarrow V_{t(\alpha)}$ , c'est-à-dire, l'objet  $(\mathcal{E}, \rho)$  équivaut à une représentation de  $\mathbb{C}Q/I$ , à savoir  $(V_i, \rho(\alpha))_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ .

Soit maintenant  $U$  n'importe quel autre  $\mathbb{C}$ -schéma. Un  $\mathbb{C}$ -point  $\text{Spec}(\mathbb{C}) \xrightarrow{u} U$  donne un foncteur  $\mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(T)$  qui à chaque  $(\mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{M}(U)$  associe une représentation de  $\mathbb{C}Q/I$ , à savoir, la représentation au-dessus du point  $u$ . Par conséquent, on peut penser à  $\mathcal{M}$  comme une généralisation géométrique des représentations de  $(Q, I)$ , mais aussi comme une généralisations des faisceaux de modules : si  $Q$  correspond au carquois avec un seul sommet et aucune flèche,  $\mathcal{M}$  devient simplement le pré-champ de faisceaux de modules localement libres de type fini, qui est équivalent à celui de fibrés vectoriels de rang fini.

**Proposition 2.1.** *Soit  $(Q, I)$  un carquois à relations fini. Alors  $\mathcal{M}$  est un champs avec la topologie fpqc.*

*Démonstration.* Soit  $T$  un schéma. Remarquons que par définition, un  $\mathcal{O}_T$ -module  $\mathcal{E}$  est déterminé par les images inverses  $\mathcal{E}|_{T_i}$  correspondant à un recouvrement d'ouverts affines  $\{T_i \rightarrow T\}$ , de même pour un morphisme de  $\mathcal{O}_T$ -modules  $\varphi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ . D'autre part, être localement libre et de type fini est une condition locale sur  $T$ , ce qui entraîne que  $\mathcal{M}$  est un champ pour la topologie de Zariski. D'après le critère 1.1 il suffit de montrer le recollement de cocycles est satisfait pour un recouvrement fpqc de schémas affines  $\{U \rightarrow T\}$ .

Soit  $f : A \rightarrow B$  le morphisme de anneaux associé au recouvrement fpqc  $\{\text{Spec}(B) = U \rightarrow \text{Spec}(A) = T\}$ ; en particulier  $B$  est un  $A$ -module fidèlement plat. Un objet  $(\mathcal{E}, \rho)$  dans  $\mathcal{M}(U \rightarrow T)$  équivaut à la donnée d'un  $B$ -module localement libre de type fini  $N$ , un morphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres  $\rho : \mathbb{C}Q/I \rightarrow \text{End}_B(N)$  ainsi qu'un isomorphisme de  $B \otimes_A B$ -modules

$$\psi : N \otimes_A B \simeq B \otimes_A N$$

compatible avec  $\rho$  et tel que la condition de cocycle soit satisfaite, c'est-à-dire, tel que

$$\psi_2 = \psi_1 \circ \psi_3 : N \otimes_A B \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A B \otimes_A N$$

où  $\psi_i$  est le isomorphisme de  $B \otimes_A B \otimes_A B$ -modules dérivé de  $\psi$  en ajoutant  $\text{Id}_B$  dans la première, deuxième et troisième position, respectivement. Afin d'utiliser le critère 1.1, on doit trouver un  $A$ -module localement libre de type fini  $M$  ainsi qu'un morphisme  $\varrho : \mathbb{C}Q/I \rightarrow \text{End}_A(M)$  tel que  $(B \otimes_A M, \text{Id}_B \otimes \varrho, \chi_M) \simeq (N, \rho, \psi)$  pour tout objet  $(N, \psi) \in \mathcal{M}(U \rightarrow T)$ . Ici  $\chi_M : (B \otimes_A M) \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A (B \otimes_A M)$  est le isomorphisme de  $B \otimes_A B$  modules tel que

$$\chi_M(b \otimes m \otimes b') = b \otimes b' \otimes m.$$

On pose  $M = GN \subset N$  le sous  $A$ -module de  $N$  formé des éléments  $n \in N$  tels que  $1 \otimes n = \varphi(n \otimes 1)$ . Remarquons que comme  $\varphi$  est compatible avec  $\rho$ , pour tout chemin  $\alpha$ , on a que  $\rho(\alpha)$  se restreint à  $GN$  et définit un endomorphisme. Si  $(N', \rho', \varphi')$  est un autre objet dans  $\mathcal{M}(U \rightarrow T)$  et  $f : (N, \rho, \varphi) \rightarrow (N', \rho', \varphi')$  un morphisme, alors comme  $f$  est compatible avec  $\varphi$  et  $\varphi'$ , on obtient que  $f(GN) \subset GN'$ .

Il reste à voir que  $GN$  est localement libre de type fini, on a la proposition suivante :

**Lemme 2.1.** [14, Lemme 35.7.6] *Soit  $T$  un schéma et soit  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_T$ -module. Si  $\{T_i \rightarrow T\}$  est un recouvrement fpqc tel que  $\mathcal{E}|_{T_i}$  est un  $\mathcal{O}_{T_i}$ -module localement libre de type fini, alors  $\mathcal{E}$  l'est aussi.*

On peut définir ainsi un foncteur

$$G : \mathcal{M}(U \rightarrow T) \rightarrow \mathcal{M}(T)$$

qui associe à un objet  $(N, \rho, \varphi)$  le  $A$ -module  $GN$  muni de  $\rho|_{GN}$ . Soit  $F$  le foncteur  $\mathcal{M}(T) \rightarrow \mathcal{M}(U \rightarrow T)$  du lemme 1.1, alors  $F$  et  $G$  établissent une équivalence de catégories entre  $\mathcal{M}(T)$  et  $\mathcal{M}(U \rightarrow T)$ . Par exemple, si  $M$  est un  $A$ -module, le fait que  $G(B \otimes_A M)$  soit isomorphe à  $M$  découle d'une version généralisée du lemme 1.2 :

**Lemme 2.2.** [15, Lemme 4.22] *Soit  $A \rightarrow B$  un morphisme fidèlement plat d'anneaux et soit  $M$  un  $A$ -module. La suite*

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{f \otimes \text{Id}_M} B \otimes_A M \xrightarrow{(\pi_1^* - \pi_2^*) \otimes \text{Id}_M} B \otimes_A B \otimes_A M$$

où  $f \otimes \text{Id}_M(m) = 1 \otimes m$  pour tout  $m \in M$  et  $(\pi_1^* - \pi_2^*)$  est comme dans 1.2, est exacte.

Ce lemme permet aussi démontrer que  $N \simeq B \otimes_A GN$ , pour les calculs précis on envoie le lecteur vers [15, Theoreme 4.21].  $\square$

Le champ de représentations est l'objet central dans la construction de l'algèbre de Hall motivique associé à  $(Q, I)$ . Avant d'introduire cet objet, on étudie quelques propriétés de  $\mathcal{M}$ . On fixe  $N = \mathbb{Z}^{Q_0}$ , et on rappelle qu'il existe un morphisme des groupes :

$$d : \mathcal{K}(\text{mod}(Q, I)) \rightarrow N$$

qui associe à une représentation son vecteur de dimension. Ici  $\mathcal{K}(\text{mod}(Q, I))$  est le groupe, qu'on appelle le *groupe de Grothendieck*, formé par les classes d'isomorphisme de représentations complexes  $(Q, I)$ . On fixe une base  $\{n_i\}_{i \in Q_0}$  de  $N$  qui satisfait que

$$d([S_i]) = n_i \quad \forall i \in Q_0,$$

où  $S_i$  correspond au module simple associé au sommet  $i$  pour tout  $i \in I$ . On définit

$$N^\oplus = \left\{ \sum_{i \in Q_0} \lambda_i n_i \mid \lambda_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\}$$

.

**Proposition 2.2.** *Le champs  $\mathcal{M}$  est l'union disjointe*

$$\mathcal{M} = \bigsqcup_{d \in N^\oplus} \mathcal{M}_d$$

de sous-champs ouverts et fermés  $\mathcal{M}_d$  qui comprennent les représentations avec vecteur de dimension  $d$ .

*Démonstration.* Soit  $T$  un  $\mathbb{C}$ -schéma et  $(\mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{M}(T)$ . Soit  $i \in Q_0$  un sommet de  $Q$  et  $e_i$  l'élément de  $\mathbb{C}Q/I$  qui lui correspond. Alors  $\rho(e_i) : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  est une projection de  $\mathcal{O}_T$ -module associé  $\mathcal{E}_i$ . En fait  $(\mathcal{E}, \rho)$  est équivalent à une famille de  $\mathcal{O}_T$ -modules  $(\mathcal{E}_i)_{i \in Q_0}$  localement libres de type fini avec des morphismes de  $\rho(\alpha) : \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_j$  pour toute flèche  $i \rightarrow j$  dans  $Q_1$  qui satisfont aux relations de  $I$ , c'est à dire que  $(\mathcal{E}, \rho)$  est une représentation « géométrique » de  $(Q, I)$ . Par exemple, si  $Q_0 = \{\circ\}$  et  $Q_1 = \emptyset$ ,  $\mathcal{M}(T)$  n'est que le groupoïde de  $\mathcal{O}_T$ -modules localement libres de type fini. Si  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}(T)$  est un tel  $\mathcal{O}_T$ -module, alors le produit fibré  $\mathcal{M}_d \times_{\mathcal{M}} T$  associé à  $T \xrightarrow{\mathcal{E}} \mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}_d \hookrightarrow \mathcal{M}$  satisfait que, au-dessus d'un autre  $\mathbb{C}$ -schéma  $S$

$$(\mathcal{M}_d \times_{\mathcal{M}} T)(S) \simeq \{S \rightarrow T \mid \mathcal{E}|_S \text{ est de dimension } d \in \mathbb{N}\} \simeq \text{Hom}_{\text{Sch}_{\mathbb{C}}}(S, T_d),$$

où  $T_d$  correspond au sous-ensemble de  $T$  tel que pour tout  $t \in T_d$  on ait que  $\mathcal{E}_t$  soit un  $\mathcal{O}_{T,t}$ -module libre de rang  $d$ . D'autre part, l'application

$$\begin{aligned} T &\xrightarrow{r} \mathbb{N} \\ t &\mapsto \dim_{k(t)}(\mathcal{E}_t \otimes_{\mathcal{O}_{T,t}} k(t)), \end{aligned}$$

où  $k(t)$  est le corps résiduel associé à  $t \in T$ , est localement constante. Par exemple, si  $t \in T$  correspond à un  $\mathbb{C}$ -point, alors son corps résiduel est  $\mathbb{C}$  et l'application  $r$  calcule la dimension du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathcal{E}_t \otimes_{\mathcal{O}_{T,t}} \mathbb{C}$ . On en déduit que  $T_d$  est ouvert et fermé pour tout  $d \in \mathbb{N}$ .

Pour  $(Q, I)$  général, on peut définir des applications  $r_i$  qui envoient un point  $t$  sur la dimension du  $k(t)$ -espace vectoriel  $(\mathcal{E}_i) \otimes_{\mathcal{O}_{T,t}} k(t)$ . Si  $d \in N^\oplus$ , on aura que

$$(\mathcal{M}_d \times_{\mathcal{M}} T)(S) \simeq \text{Hom}_{\text{Sch}_{\mathbb{C}}}(S, T_d),$$

où  $T_d = \bigcap_{d=(d_i)_{i \in Q_0}} T_{d_i}^i$  et  $T_k^i = r_i^{-1}(k)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , qui est fermé et ouvert. En plus,

$$T = \bigsqcup_{d \in N^\oplus} T_d,$$

ce qui finit la preuve. □

**Proposition 2.3.** *Le champ  $\mathcal{M}_d$  est isomorphe au champ quotient  $[X/G]$ , où  $X = \text{rep}_{Q,I,d}$  est le schéma affine de représentations de  $(Q, I)$  de vecteur de dimension  $d = \sum_{i \in Q_0} d_i n_i \in N$ , et  $G = GL_d(\mathbb{C}) = \prod_{i \in Q_0} GL_{d_i}(\mathbb{C})$  qui agit sur  $X$ .*

*Démonstration.* Supposons d'abord que  $Q_0 = \{\circ\}$  et  $Q_1 = \emptyset$ . Comme on a vu avant, dans ce cas,  $\mathcal{M}$  n'est que le champs de faisceaux cohérents localement libres de type fini qui est équivalent à celui de fibrés vectoriels. Fixons  $d \in \mathbb{N}$ . Soit  $T$  un  $\mathbb{C}$ -schéma et  $\mathcal{E}$  un  $\mathcal{O}_T$ -module localement libre de rang  $d$ , on définit le  $\mathcal{O}_T$ -module  $\mathcal{I}so(\mathcal{O}_T^d, \mathcal{E})$  de la façon suivante. Pour tout ouvert  $U \subset T$  pour lequel  $\mathcal{E}|_U \simeq (\mathcal{O}_T|_U)^d$ , on pose :

$$\mathcal{I}so(\mathcal{O}_T^d, \mathcal{E})(U) = \{b : \mathcal{O}_T^d(U) \rightarrow \mathcal{E}|_U \mid b \text{ est un isomorphisme}\},$$

sur lequel  $GL_d(\mathcal{O}_T(U))$  agit par changement de base. Autrement dit,  $\mathcal{I}so(\mathcal{O}_T^d, \mathcal{E})$  est le  $\mathcal{O}_T$ -module que associé à chaque point  $t \in T$  l'ensemble de  $k(t)$ -bases de  $\mathcal{E}_t \otimes_{\mathcal{O}_{T,t}} k(t)$ , sur lequel  $GL_d(k(t))$  agit. On en déduit que l'on peut associer à  $\mathcal{I}so(\mathcal{O}_T^d, \mathcal{E})$  un  $GL_d(\mathbb{C})$ -fibré sur  $T$ , qui est principal avec la topologie de Zariski (et dont fpqc), qu'on note aussi  $\mathcal{I}so(\mathcal{O}_T^d, \mathcal{E})$ . On obtient l'équivalence

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_d(T) & \rightarrow & [\text{Spec}(\mathbb{C})/GL_d(\mathbb{C})](T) \\ \mathcal{E} \mapsto & & \begin{array}{ccc} \mathcal{I}so(\mathcal{O}_T^d, \mathcal{E}) & \rightarrow & \text{Spec}(\mathbb{C}) \\ \downarrow & & \cdot \\ T & & \end{array} \end{array}$$

Soit  $(Q, I)$  un carquois à relations fini quelconque et  $d = (d_i)_{i \in Q_0} \in \mathbb{N}^{\oplus}$  un vecteur de dimension. On définit le schéma  $\text{rep}_{Q, I, d}$  comme le schéma défini par les  $\mathbb{C}$ -points

$$\text{rep}_{Q, I, d}(\mathbb{C}) = \left\{ (M_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \in \prod_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ \alpha: i \rightarrow j}} M_{d_j \times d_i}(\mathbb{C}) \mid (M_\alpha)_{\alpha \in Q_1} \text{ respectent les relations dans } I \right\} \\ \subset \prod_{\substack{\alpha \in Q_1 \\ \alpha: i \rightarrow j}} \mathbb{A}^{d_j \times d_i}(\mathbb{C}).$$

Comme dans la proposition précédente, un objet  $(\mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{M}_d(T)$  est équivalent à  $(\mathcal{E}_i, \rho(\alpha))_{i \in Q_0, \alpha \in Q_1}$  où les  $\mathcal{E}_i$  sont des  $\mathcal{O}_T$ -modules localement libres de rang  $d_i$  pour tout  $i \in Q_0$ . On obtient ainsi un  $GL_d(\mathbb{C})$ -fibré principal  $\prod_{i \in Q_0} \mathcal{I}so(\mathcal{O}_T^{d_i}, \mathcal{E}_i)$  sur  $T$ . Pour obtenir un objet de  $[\text{rep}_{Q, I, d}/GL_d(\mathbb{C})](T)$  il reste trouver un morphisme  $GL_d(\mathbb{C})$ -équivariant  $f_\rho : \prod_{i \in Q_0} \mathcal{I}so(\mathcal{O}_T^{d_i}, \mathcal{E}_i) \rightarrow \text{rep}_{Q, I, d}$ . Pour  $U$  un ouvert assez petit de  $T$ , on sait que

$$\prod_{i \in Q_0} \mathcal{I}so(\mathcal{O}_T^{d_i}, \mathcal{E}_i)(U) \simeq \prod_{i \in Q_0} \{b : \mathcal{O}_T^{d_i}(U) \rightarrow \mathcal{E}_i|_U \mid b \text{ est un isomorphisme}\},$$

ce qui entraîne que un point  $\varphi \in \prod_{i \in Q_0} \mathcal{I}so(\mathcal{O}_T^{d_i}, \mathcal{E}_i) \times_T U$  est, en gros, une famille  $\varphi = (\varphi_i)_{i \in Q_0}$  de isomorphismes  $\varphi_i : \mathcal{O}_T^{d_i}(U) \rightarrow \mathcal{E}_i|_U$ . Dans ce cas, on définit  $f_\rho(\varphi)$  en considérant le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_T^{d_i}(U) & \xrightarrow{f(\varphi_i)|_U} & \mathcal{O}_T^{d_j}(U) \\ \varphi_i \downarrow & & \downarrow \varphi_j \\ \mathcal{E}_i|_U & \xrightarrow{\rho(\alpha)|_U} & \mathcal{E}_j|_U, \end{array}$$

qui définit un morphisme  $GL_d(\mathbb{C})$ -équivariante. □

En particulier, si on considère la topologie fppf,  $\mathcal{M}_d$  est un champ algébrique en étant isomorphe à un champ quotient sur un groupe linéaire. Il se trouve que les champs algébriques sont stables par union disjointe, ce qui implique que  $\mathcal{M}$  est aussi un champ algébrique (car les propriétés définies dans la définition 1.10 sont satisfaites par morceaux, voir par exemple [14, Lemmes 92.15.5 et 98.9.13]). Comme on a déjà vu, un atlas pour le champ  $\mathcal{M}_d$  est le schéma  $\text{rep}_{Q,I,d}$  qui est de type fini sur  $\mathbb{C}$ , ce qui entraîne que  $\mathcal{M}$  est un champ localement de type fini.

Pour construire le produit dans l'algèbre de Hall on aurait aussi besoin du champ de suites exactes de représentations de  $(Q, I)$ .

**Définition 2.2.** Soit  $(Q, I)$  un carquois à relations fini et  $\mathcal{M}$  son champ de  $\mathbb{C}$ -représentations associé, on définit le champ  $\mathcal{M}^{(2)}$  de la façon suivante. Soit  $T$  un  $\mathbb{C}$ -schéma, les objets de  $\mathcal{M}^{(2)}(T)$  comprennent des  $\mathcal{O}_T$ -modules  $\{\mathcal{E}_i, \rho_i\}_{i=1,2,3}$  dans  $\mathcal{M}(T)$  ainsi que des morphismes  $\alpha, \beta$  de  $\mathcal{O}_T$ -modules compatibles avec les  $\rho_i$  qui forment une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\alpha} \mathcal{E}_2 \xrightarrow{\beta} \mathcal{E}_3 \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

de  $\mathcal{O}_T$ -modules. Un morphisme entre deux objets  $(\mathcal{E}_i, \rho_i, \alpha, \beta)$  et  $(\mathcal{E}'_i, \rho'_i, \alpha', \beta')$  est un triplet de  $\mathcal{O}_T$ -isomorphismes  $(\theta_i)_{i=1,2,3}$  compatibles avec les  $\rho_i$  et  $\rho'_i$  et qui rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{E}_2 & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{E}_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \theta_1 & & \downarrow \theta_2 & & \downarrow \theta_3 & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}'_1 & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{E}'_2 & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{E}'_3 & \longrightarrow & 0 \end{array} \cdot$$

**Proposition 2.4.**  $\mathcal{M}^{(2)}$  est un champ avec la topologie fpcq.

*Démonstration.* On peut voir facilement que  $\mathcal{M}^{(2)}$  est un champ pour la topologie de Zariski. Soit maintenant  $\{U \rightarrow T\}$  un recouvrement fpqc tel que  $U = \text{Spec}(B)$  et  $T = \text{Spec}(A)$  pour des anneaux commutatifs  $A$  et  $B$ , en particulier,  $B$  est un  $A$ -module fidèlement plat. Soit  $\bar{\mathcal{E}} = (\mathcal{E}_i, \rho_i, \alpha, \beta) \in \mathcal{M}^{(2)}(U)$  muni d'un isomorphisme  $\varphi : \mathcal{M}^{(2)}(\pi_1)(\bar{\mathcal{E}}) \rightarrow \mathcal{M}^{(2)}(\pi_2)(\bar{\mathcal{E}})$  dans  $\mathcal{M}^{(2)}(U \times_T U)$ . Cet objet est équivalent à la donné d'une suite exacte de  $B$ -modules  $0 \rightarrow N_1 \xrightarrow{\alpha^*} N_2 \xrightarrow{\beta^*} N_3 \rightarrow 0$ , compatible avec les  $\rho_i : \mathbb{C}Q/I \rightarrow \text{End}(N_i)$ , ainsi que des isomorphismes  $\varphi_i : N_i \otimes_A B \rightarrow B \otimes_A N_i$  tels que le digramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N_1 \otimes_A B & \xrightarrow{\alpha^* \otimes_A \text{Id}_B} & N_2 \otimes_A B & \xrightarrow{\beta^* \otimes_A \text{Id}_B} & N_3 \otimes_A B & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_1 & & \downarrow \varphi_1 & & \\ 0 & \longrightarrow & B \otimes_A N_1 & \xrightarrow{\text{Id}_B \otimes_A \alpha^*} & B \otimes_A N_2 & \xrightarrow{\text{Id}_B \otimes_A \beta^*} & B \otimes_A N_3 & \longrightarrow & 0 \end{array} \cdot$$

Les lignes de ce diagramme sont exactes, car si  $B$  est un  $A$ -module fidèlement plat, une suite courte de  $A$ -modules est exacte ssi son image sous le foncteur  $- \otimes_A B$  est exacte. D'après la preuve de la proposition 2.1, on sait que les  $A$ -modules  $GN_i = \{n \in N_i \mid 1 \otimes n = \varphi_i(n \otimes 1)\}$  pour  $1 \leq i \leq 3$  satisfont à  $GN_i \otimes_A B \simeq N_i$  et que les  $\rho_i$  se restreignent à  $GN_i$  pour tout  $i$ . Comme  $\beta^*$  et  $\alpha^*$  son compatibles avec les  $\varphi_i$  pour tout  $i$ , on obtient une suite de  $A$ -modules munis des

$$0 \rightarrow GN_1 \xrightarrow{\alpha^*} GN_2 \xrightarrow{\beta^*} GN_3 \rightarrow 0,$$

qui est exacte car son image par  $-\otimes_A B$ , qui est la suite associée aux  $N_i$ , est exacte. On en déduit que  $\mathcal{M}^{(2)}$  est un champ pour la topologie fpqc.  $\square$

On définit aussi deux morphismes de champs

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^{(2)} & \xrightarrow{a_2} & \mathcal{M} \\ (a_1, a_3) \downarrow & & \\ \mathcal{M} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{M} & & \end{array}$$

où  $a_i$  associe à une suite exacte comme 2.1 l'objet  $\mathcal{E}_i$  respectivement.

**Lemme 2.3.** *Soit  $\mathcal{M}$  le champ de représentations et  $\mathcal{M}^{(2)}$  le champ de suites exactes associé, on a que :*

- i) *Le morphisme  $a_2$  est représentable et propre.*
- ii) *Le morphisme  $(a_1, a_3)$  satisfait que pour tout champ algébrique de type fini  $\mathcal{X}$  muni d'un morphisme  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{M}$ , alors  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{M} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{M}} \mathcal{M}^{(2)}$  est algébrique de type fini.*

*Démonstration.* Pour démontrer i), on considère  $T$  un  $\mathbb{C}$ -schéma et  $(\mathcal{E}, \rho)$  un objet dans  $\mathcal{M}(T)$ , et considérons le produit fibré

$$\begin{array}{ccc} T \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}^{(2)} & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow (\mathcal{E}, \rho) \\ \mathcal{M}^{(2)} & \xrightarrow{a_2} & \mathcal{M} \end{array}$$

Soit  $S$  un  $\mathbb{C}$ -schéma. Un objet du groupoïde  $T \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}^{(2)}(S)$  est la donnée d'un morphisme  $S \rightarrow T$ , ainsi que d'une suite exacte de  $\mathcal{O}_S$ -modules  $0 \rightarrow \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_3 \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{M}^{(2)}(S)$ , munis du diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_1 & \longrightarrow & \mathcal{E}_2 & \longrightarrow & \mathcal{E}_3 \longrightarrow 0 \\ & & & & \downarrow \theta & & \\ & & & & \mathcal{E}|_S & & \end{array},$$

où  $\theta$  est un isomorphisme de  $\mathcal{O}_S$ -modules. De façon équivalent, un objet dans  $T \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}^{(2)}(S)$ , est la donnée d'un morphisme  $S \rightarrow T$  avec un sous- $\mathcal{O}_S$ -module  $\mathcal{E}_1 \hookrightarrow \mathcal{E}|_S$  qui est stable sous l'action de  $\mathbb{C}Q/I$ . Ces objets sont paramétrés par les  $S$ -points du schéma

$$Gr_T^{\mathbb{C}Q/I}(\mathcal{E}) \subset Gr_T(\mathcal{E}),$$

où  $Gr_T^{\mathbb{C}Q/I}(\mathcal{E})$  est un sous-schéma fermé de la grassmannienne relative  $Gr_T(\mathcal{E})$  de sous- $\mathcal{O}_T$ -modules de  $\mathcal{E}$  (pour plus des détails sur la construction de ce schéma, voir par exemple [14, Partie 2, section 27.22] ou encore [4, Section 2]). Ainsi, on obtient que le morphisme  $a_2$  est représentable. Comme  $T \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}^{(2)} \rightarrow T$  correspond au morphisme  $Gr_T^{\mathbb{C}Q/I}(\mathcal{E}) \hookrightarrow Gr_T(\mathcal{E}) \rightarrow T$  qui est représentable en étant une restriction à un schéma fermé d'un morphisme propre ([4, Section 3.2]), on a le résultat. En particulier, d'après le lemme 1.4, on sait que  $\mathcal{M}^{(2)}$  est algébrique.

Désormais, démontrons ii). Soit  $\mathcal{X}$  un champ algébrique de type fini muni du morphisme  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M} \times \mathcal{M}$ . Comme être algébrique est stable par produit fibré, on sait que  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{M}$  est algébrique. Comme  $\mathcal{M} = \cup_{d \in \mathbb{N}^{\oplus}} \mathcal{M}_d$  où chaque  $\mathcal{M}_d$  est de type fini, on peut supposer que  $\mathcal{X} \rightarrow \sqcup_{d_1+d_3=d} \mathcal{M}_{d_1} \times \mathcal{M}_{d_3}$ , car seulement un nombre fini des produits fibrés  $\mathcal{X} \times_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \sqcup_{d_1+d_3=d} \mathcal{M}_{d_1} \times \mathcal{M}_{d_3}$  sont non-vides. Ceci induit le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
& & & \mathcal{M}^{(2)} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_d & \rightarrow & \mathcal{M}_d \\
& & & \parallel & \downarrow & \downarrow \\
\mathcal{X}' & \longrightarrow & a_2^{-1}(\mathcal{M}_d) & \longrightarrow & \mathcal{M}^{(2)} & \xrightarrow{a_2} & \mathcal{M} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow (a_1, a_3) & & \downarrow \\
\mathcal{X} & \longrightarrow & \sqcup_{d_1+d_3=d} \mathcal{M}_{d_1} \times \mathcal{M}_{d_3} & \hookrightarrow & \mathcal{M} \times \mathcal{M} & , & 
\end{array}$$

où chaque carré est correspond à un produit fibré. Comme  $\mathcal{M}_d$  est de type fini et  $a_2$  est propre, on déduit que le champ  $a_2^{-1}(\mathcal{M}_d)$  est de type fini. Comme être de type fini est stable par produits fibrés, on déduit que  $\mathcal{X}' = \mathcal{X} \times_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \mathcal{M}^{(2)}$  est de type fini.  $\square$

## 2.2 L'algèbre $H(Q, I)$

Soit  $\mathcal{M}$  le champ de représentations, on écrit  $\mathbf{St} / \mathcal{M}$  pour noter la catégorie dont les objets sont des champs algébriques  $\mathcal{X}$  de type fini et avec des *stabilisateurs affines*, munis d'un morphisme de champs

$$\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}.$$

Un morphisme entre deux tels objets  $[\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}]$  et  $[\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}]$  est la donné d'un morphisme de champs  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  tel que le diagramme correspondant soit commutatif.

Soit  $\mathcal{X}$  un champ, une des conditions nécessaires pour que  $\mathcal{X}$  soit algébrique est que les foncteurs  $\text{Iso}_T(X, Y)$  soient représentables par un schéma pour tout  $\mathbb{k}$ -schéma  $T$  et objets  $X, Y \in \mathcal{X}(T)$  (voir par exemple [6, Proposition 2.19]). On dit que  $\mathcal{X}$  a des stabilisateurs affines si tout  $\text{Iso}_{\mathbb{C}}(X, X)$  est représenté par un schéma affine. Cette propriété est surtout technique et ne sera pas très importante pour les fins de ce texte. Pour un étude plus étendue de ces sujets on recommande [3, Sections 2 et 3].

**Exemple 2.2.** Les champs  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{M}^{(2)}$  ont des stabilisateurs affines. En effet, un élément  $X = (\mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{M}(\text{Spec}(\mathbb{C}))$  est la donné d'un représentation classique du carquois  $(Q, I)$ , c'est-à-dire, d'un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $V$  de dimension  $d$  muni d'un morphisme  $\rho; \mathbb{C}Q/I \rightarrow \text{End}(V)$ . On en déduit que le foncteur  $\text{Iso}_{\mathbb{C}}(X, X)$  est représenté par un fermé de la variété affine  $GL_V$  qui correspond aux relations donnés par  $\rho$ . De même pour  $\mathcal{M}^{(2)}$ .

**Définition 2.3.** On note  $\mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathcal{M})$  le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme d'objets  $[\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}]$  de  $\mathbf{St} / \mathcal{M}$ , quotienté par les relations suivantes :



- i) (Relation de ciseaux) Pour chaque objet  $\mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{M}$  et tout sous-champ fermé  $\mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$  et  $\mathcal{U} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{Y} \subset \mathcal{X}$ , on a que

$$[\mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{M}] = [\mathcal{Y} \xrightarrow{\mathcal{F}|_{\mathcal{Y}}} \mathcal{M}] + [\mathcal{U} \xrightarrow{\mathcal{F}|_{\mathcal{U}}} \mathcal{M}].$$

- ii) Pour tout objet  $\mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{M}$  et toute paire de morphismes  $\mathcal{H}_1 : \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathcal{X}$  et  $\mathcal{H}_2 : \mathcal{Y}_2 \rightarrow \mathcal{X}$  qui sont des fibrations localement triviales dans la topologie de Zariski avec les mêmes fibres, on a la relation

$$[\mathcal{Y}_1 \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \mathcal{H}_1} \mathcal{M}] = [\mathcal{Y}_2 \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \mathcal{H}_2} \mathcal{M}].$$

On rappelle qu'un morphisme de  $\mathbb{k}$ -schémas  $f : X \rightarrow Y$  est une *fibration localement triviale* dans la topologie de Zariski s'il existe des ouverts  $U_i \subset Y$  tels que  $Y = \bigcup_{i \in I} U_i$ , des schémas  $F_i$ , et diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U_i) & \xrightarrow{\cong} & U_i \times_{\mathbb{k}} F_i \\ & \searrow f & \swarrow \pi_{U_i} \\ & & U_i \end{array}$$

Deux fibrations  $f_1, f_2$  ont les mêmes fibres si pour tout  $y \in Y$  leurs fibrés au-dessus de  $y$  sont isomorphes. Un morphisme de champs  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est une *fibration localement triviale* avec la topologie de Zariski si  $\mathcal{F}$  est representable et pour tout schéma  $U \rightarrow Y$  le morphisme  $U \times_Y \mathcal{X} \rightarrow U$  est une fibration localement triviale.

**Définition 2.4.** Soit  $X$  un schéma, on dit que  $X$  est *stratifié* par une collection de schémas  $\{X_i\}_{i \in I}$  si  $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$  et les  $X_i$  sont disjoints et localement fermées. On dit qu'un champ  $\mathcal{X}$  est stratifié par une collection de champs  $\{\mathcal{X}_i\}_{i \in I}$ , s'ils sont localement fermés, disjoints et s'ils recouvrent  $\mathcal{X}$ .

**Lemme 2.4.** Soit  $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$  un champ algébrique de type fini avec stabilisateurs affines. Si  $\mathcal{X}$  est stratifié par des sous-champs  $\mathcal{X}_i$ , alors il existe  $J \subset I$  ensemble fini tel que  $\mathcal{X} = \bigsqcup_{j \in J} \mathcal{X}_j$  et  $\mathcal{X}_j \neq \emptyset$  pour tout  $j \in J$ . En plus

$$[\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}] = \sum_{i \in I} [\mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{M}]$$

*Démonstration.* Ceci se suit de [3, Lemme 2.2], en remarquant que une stratification du champs réduit associé  $\mathcal{X}_{\text{red}}$  donne une stratification de  $\mathcal{X}$  (On remarque que  $\mathcal{X}_{\text{red}}$  peut être défini en prenant le schéma réduit associé à l'atlas de  $\mathcal{X}$ ). Ici, l'hypothèse d'avoir des stabilisateurs affines n'est pas utilisée.  $\square$

**Définition 2.5.** Un morphisme  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est une *bijection géométrique*, aussi dit *équivalence de  $\mathbb{C}$ -points*, s'il est representable et le foncteur

$$\mathcal{F}(\text{Spec}(\mathbb{C})) : \mathcal{X}(\text{Spec}(\mathbb{C})) \rightarrow \mathcal{Y}(\text{Spec}(\mathbb{C}))$$

est une équivalence de catégories.

**Lemme 2.5.** [3, Lemme 3.2] Un morphisme  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  dans  $\mathbf{St}/\mathbb{C}$  est une bijection géométrique s'il existe des stratifications  $\mathcal{X}_i \subset \mathcal{X}$  et  $\mathcal{Y}_i \subset \mathcal{Y}$  avec  $i \in I$  tel que  $\mathcal{F}$  induit des isomorphismes

$$\mathcal{F}_i : \mathcal{X}_i \rightarrow \mathcal{Y}_i.$$

**Proposition 2.5.** *Supposons qu'on a un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_1 & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{F}_1 \searrow & & \swarrow \mathcal{F}_2 \\ & \mathcal{M} & \end{array}$$

tel que  $\mathcal{G}$  soit une équivalence de  $\mathbb{C}$ -points, alors  $[\mathcal{X}_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_1} \mathcal{M}] = [\mathcal{X}_2 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} \mathcal{M}]$  dans  $\mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathcal{M})$ .

*Démonstration.* D'après le lemme 2.5 on obtient qu'il existe des stratifications  $\mathcal{X}_{1,i}$  et  $\mathcal{X}_{2,i}$   $i \in I$  de  $\mathcal{X}_1$  et  $\mathcal{X}_2$  respectivement, telles qu'on ait des isomorphismes  $\mathcal{G}_i$  qui satisfassent au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_{1,i} & \xrightarrow{\mathcal{G}_i} & \mathcal{X}_{2,i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{X}_1 & \xrightarrow{\mathcal{G}} & \mathcal{X}_2 \\ \mathcal{F}_1 \searrow & & \swarrow \mathcal{F}_2 \\ & \mathcal{M} & \end{array} .$$

Grâce au lemme 2.4 on en déduit que

$$[\mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{M}] = \sum_{i \in I} [\mathcal{X}_{1,i} \rightarrow \mathcal{M}] = \sum_{i \in I} [\mathcal{X}_{2,i} \rightarrow \mathcal{M}] = [\mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{M}].$$

□

**Proposition 2.6.** [3, Proposition 3.5] *Un champ  $\mathcal{X}$  dans  $\mathbf{St} / \mathbb{C}$  a des stabilisateurs affines ssi il existe un  $\mathbb{C}$ -schéma  $Y$ , réduit, séparé et de type fini, sur lequel  $G = GL_d(\mathbb{C})$  agit, ainsi qu'un morphisme de champs*

$$\mathcal{F} : [Y/G] \rightarrow \mathcal{X}$$

qui est une équivalence de  $\mathbb{C}$ -points.

On note  $\mathbf{St} / \mathbb{C}$  la catégorie de champs algébriques de type fini sur  $\mathbb{C}$  avec stabilisateurs affines et  $\mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathbb{C})$  le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphismes d'objets dans  $\mathbf{St} / \mathbb{C}$  modulo le même type de relations que  $\mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathcal{M})$ .

**Proposition 2.7.** *Le groupe  $\mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathbb{C})$  a une structure d'anneau commutatif via le produit fibré de champs. De plus, le groupe  $\mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathcal{M})$  a une structure de  $\mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathbb{C})$ -module donnée par*

$$[\mathcal{Y}] \cdot [\mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{M}] = [\mathcal{Y} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \pi_{\mathcal{X}}} \mathcal{M}],$$

pour tout  $[\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}] \in \mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathcal{M})$  et  $[\mathcal{Y}] \in \mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathbb{C})$ .

*Démonstration.* Le lemme 92.14.1 de [14] nous dit que le produit fibré de deux champs algébriques reste algébrique. On sait aussi que être un schéma affine, ainsi que être de type fini, est stable par produit fibré, ce qui entraîne que  $\mathcal{Y} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{X}$  est de type fini et que

ses stabilisateurs sont affines. Il reste à voir que cette opération respecte les relations de ciseaux ainsi que de fibrations de Zariski. Soit  $[\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}] \in \mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathcal{M})$ . Considérons  $\mathcal{Z} \xrightarrow{\mathcal{G}} \mathcal{X}$  une fibration de Zariski,  $T$  un schéma, ainsi que le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{Y} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{Z}) \times_{\mathcal{Y} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{X}} T & \longrightarrow & T \\ \downarrow & & \downarrow (Y, X) \\ \mathcal{Y} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{Z} & \xrightarrow{\text{Id}_{\mathcal{Y}} \times \mathcal{G}} & \mathcal{Y} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{X}. \end{array}$$

On peut voir facilement que  $(\mathcal{Y} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{Z}) \times_{\mathcal{Y} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{X}} T \simeq T \times_{\mathbb{C}} (\mathcal{Z} \times_{\mathcal{X}} T)$  qui est représentable par un schéma par l'hypothèse sur  $\mathcal{G}$ . De plus, si  $Z_t$  est la fibre de  $\mathcal{Z} \times_{\mathcal{X}} T \rightarrow T$  au-dessus du point  $t \in T$ , on a que, au-dessus de  $t$ ,  $T \times_{\mathbb{C}} (\mathcal{Z} \times_{\mathcal{X}} T) \rightarrow T$  a une fibre isomorphe à  $T \times Z_t$ . Ainsi, si deux fibrations de Zariski ont les mêmes fibres, ses multiples par  $\mathcal{Y}$  aussi.

Finalement, considérons  $\mathcal{F} \subset \mathcal{X}$  un sous-champ fermé. Si  $[\mathcal{Y}] \in \mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathbb{C})$ , en utilisant un argument similaire à celui pour les fibrations de Zariski, on obtient que  $\mathcal{Y} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{F}$  est un sous-champ fermé de  $\mathcal{Y} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{X}$ , de même pour les produits fibrés associés à  $\mathcal{U} = \mathcal{X} \setminus \mathcal{F}$ , et on obtient

$$[\mathcal{Y}] \cdot [\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}] = [\mathcal{Y}] \cdot [\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{M}] + [\mathcal{Y}] \cdot [\mathcal{U} \rightarrow \mathcal{M}].$$

□

## 2.2.1 Invariants motiviques

Un invariant  $\Upsilon$  de  $\mathbb{k}$ -variétés (schémas séparés, réduits et de type fini) quasi-projectifs est une application qui associe à chaque classe d'isomorphisme  $[X]$  de telles variétés un élément  $\Upsilon([X]) \in \Lambda$ , où  $\Lambda$  est un anneau commutatif. Un tel invariant est dit **motivique** si pour tout  $Y \subseteq X$  sous-variété fermée on a

$$\Upsilon([X]) = \Upsilon([Y]) + \Upsilon([X \setminus Y])$$

et si pour toutes  $\mathbb{k}$ -variétés  $X$  et  $Y$ ,

$$\Upsilon([X \times_{\mathbb{k}} Y]) = \Upsilon([X])\Upsilon([Y])$$

Dans [10], Joyce a étendu ce type d'invariants aux champs algébriques avec des stabilisateurs affines, en respectant les propriétés respectives dans le cas des champs et tel que, si  $[X/G]$  est un champ quotient avec  $G$  un groupe spécial (comme défini dans la remarque 1.3), alors

$$\Upsilon([X/G]) = \Upsilon([X])\Upsilon([G])^{-1},$$

ce qui n'est possible que quand  $\Upsilon([G])$  est inversible dans  $\Lambda$  pour tout groupe spécial  $G$ . Ce qu'on présente dans cette section est un résumé des sections 3 et 4 de [10].

**Lemme 2.6.** [10, Lemme 4.2] Soit  $\Upsilon$  un invariant motivique et  $Y \rightarrow X$  une fibration de Zariski de variétés quasi-projectives au fibre  $F$ . Alors  $\Upsilon([Y]) = \Upsilon([F])\Upsilon([X])$ .

**Définition 2.6.** Soit  $X$  une  $\mathbb{C}$ -variété projective. Le polynôme de Poincaré associée à  $X$  est donné par

$$\sum_{i=0}^{2d} \dim_{\mathbb{C}} (H^i(X_{an}, \mathbb{C})) t^i \in \mathbb{C}[t]$$

où  $X_{an}$  est la variété compacte complexe associée aux  $\mathbb{C}$ -points de  $X$ ,  $d$  est la dimension complexe de  $X$  et  $H^i(X_{an}, \mathbb{C})$  est la cohomologie singulière.

Le polynôme de Poincaré, ainsi que le polynôme de Hodge et la caractéristique d'Euler définissent des exemples d'invariants motiviques, mais seulement les deux premiers s'étendent en invariants dans  $\mathbf{St} / \mathbb{C}$ .

**Théorème 2.1.** [10, Théorème 4.10] Soit  $\Lambda$  un anneau commutatif avec unité 1. Soit

$$\Upsilon : \{ \text{Classes d'isomorphisme } [X] \text{ of } \mathbb{C}\text{-variétés quasi-projectives } X \} \rightarrow \Lambda$$

une application qui satisfait aux conditions suivantes :

- i) Si  $Y$  est une sous-variété fermée de  $X$ , alors  $\Upsilon([X]) = \Upsilon([Y]) + \Upsilon([X \setminus Y])$ .
- ii) Si  $X$  et  $Y$  sont des  $\mathbb{C}$ -variétés quasi-projectives, alors  $\Upsilon([X \times_{\mathbb{C}} Y]) = \Upsilon([X])\Upsilon([Y])$ .
- iii) Soit  $\ell = \Upsilon([\mathbb{A}^1]) \in \Lambda$ , où  $\mathbb{A}^1$  est la  $\mathbb{C}$ -droite affine. Alors  $\ell$  et  $\ell^k - 1$  avec  $k \in \mathbb{N}_{>0}$  sont inversibles dans  $\Lambda$ .

Alors il existe un unique morphisme d'anneaux commutatifs  $\bar{\Upsilon} : \mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathbb{C}) \rightarrow \Lambda$  tel que si  $G$  est un  $\mathbb{C}$ -groupe algébrique spécial qui agit sur une  $\mathbb{C}$ -variété quasi-projective, alors

$$\Upsilon([X/G]) = \Upsilon([X])\Upsilon([G])^{-1}$$

L'idée derrière la démonstration de ce théorème se pose sur la proposition 2.6. En effet, comme on a déjà vu, on peut remplacer  $[\mathcal{X}] \in \mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathbb{C})$  par  $[Y/G]$ , où  $Y$  est une  $\mathbb{C}$ -variété (que on peut supposer quasi-projective) et  $G$  est un groupe algébrique spécial qui agit sur  $Y$ . Par conséquent, il suffit de définir  $\bar{\Upsilon}$  pour les champs quotients. Les lemmes suivants justifient la nécessité d'avoir la propriété iii) ainsi que l'unicité de  $\bar{\Upsilon}$ .

**Lemme 2.7.** [10, Lemme 4.6] Supposons que les propriétés i)-iii) du théorème 2.1 sont satisfaites pour  $\Upsilon$ . Alors pour tout  $d \in \mathbb{N}_{>0}$  on a

$$\Upsilon([GL_d(\mathbb{C})]) = \ell^{d(d-1)/2} \prod_{k=1}^d (\ell^k - 1),$$

qui est inversible dans  $\Lambda$  par hypothèse.

*Démonstration.* Considérons le morphisme  $GL_d(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{A}^d \setminus \{\bar{0}\}$  qui envoie une matrice vers sa première colonne. Ce morphisme est une fibration de Zariski aux fibres  $\mathbb{A}^{d-1} \times GL_{d-1}(\mathbb{C})$ . Le lemme 2.6 implique que

$$\begin{aligned} \Upsilon([GL_d(\mathbb{C})]) &= \Upsilon([\mathbb{A}^{d-1} \times GL_{d-1}(\mathbb{C})])\Upsilon([\mathbb{A}^d \setminus \{\bar{0}\}]) = \\ &= \Upsilon([\mathbb{A}^{d-1}])\Upsilon([\mathbb{A}^d \setminus \{\bar{0}\}])\Upsilon([GL_{d-1}(\mathbb{C})]) = \\ &= \ell^{d-1} \cdot (\ell^d - 1)\Upsilon([GL_{d-1}(\mathbb{C})]). \end{aligned}$$

On déduit le résultat par induction sur  $d$ . □

**Lemme 2.8.** Supposons que les propriétés i)-iii) du théorème 2.1 sont satisfaites pour  $\Upsilon$ , et soit  $G$  un  $\mathbb{C}$ -groupe algébrique spécial. Alors  $\Upsilon([G])$  est inversible dans  $\Lambda$ .

*Démonstration.* Le résultat se suit du fait qu'on peut plonger un tel groupe  $G$  dans  $GL_d(\mathbb{C})$  pour certain  $d \in \mathbb{N}_{>0}$  de façon que le morphisme  $GL_d(\mathbb{C}) \rightarrow GL_d(\mathbb{C})/G$  soit une fibration de Zariski de fibre  $G$ . Comme  $\Upsilon([GL_d(\mathbb{C})])$  est inversible,  $\Upsilon([G])$  aussi.  $\square$

**Proposition 2.8.** [10, Proposition 4.8] *Supposons que les propriétés i)-iii) du théorème 2.1 sont satisfaites pour  $\Upsilon$ . Soit  $\mathcal{X}$  un  $\mathbb{C}$ -champ algébrique de type fini. Supposons que  $\mathcal{X}$  est isomorphe à un champ quotient  $[Y/G]$ , où  $Y$  est une  $\mathbb{C}$ -variété quasi-projective et  $G$  est un  $\mathbb{C}$ -groupe algébrique spécial qui agit sur  $Y$ . Alors  $\Upsilon([Y])/\Upsilon([G])$  ne dépend que de  $\mathcal{X}$  et pas du choix de  $Y$  et  $G$ .*

**Exemple 2.3.** Comme on a déjà mentionné, le polynôme de Poincaré s'étend en un invariant motivique. En effet, le théorème de Künneth, qui donne une formule pour le groupes de cohomologie singulière d'un produit de variétés  $X \times_{\mathbb{C}} Y$  en termes des groupes de cohomologie de  $X$  et  $Y$ , nous dit effectivement que  $\Upsilon([X \times_{\mathbb{C}} Y]) = \Upsilon([X])\Upsilon([Y])$ . On l'étend à toutes les variétés quasi-projectives de telle façon que la propriété i) du théorème 2.1 soit satisfait. Ainsi, si  $\mathbb{P}^1$  est le  $\mathbb{C}$ -espace projectif et  $\infty$  le point à l'infini on a

$$\Upsilon([\mathbb{P}^1]) = \Upsilon([\mathbb{A}^1]) + \Upsilon([\infty]) = t^2 + 1$$

Comme  $\Upsilon([\infty]) = 1$  en étant un  $\mathbb{C}$ -point, on obtient que  $\ell = \Upsilon([\mathbb{A}^1]) = t^2$  qui est clairement inversible dans  $\Lambda = \mathbb{C}(t)$ , de même pour  $t^{2k} - 1$  pour  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ . Le théorème 2.1 nous dit alors qu'il existe un unique morphisme d'anneaux commutatifs

$$\bar{\Upsilon} : \mathcal{K}(\mathbf{St}/\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}(t)$$

qui associe à chaque  $[X] \in \mathcal{K}(\mathbf{St}/\mathbb{C})$  avec  $X$  une  $\mathbb{C}$ -variété projective son polynôme de Poincaré.

Dans la suite, on pose  $\bar{\Upsilon}$  comme dans l'exemple 2.3. On considère aussi le  $\mathbb{C}(t)$ -espace vectoriel

$$\mathcal{K}_{\bar{\Upsilon}}(\mathbf{St}/\mathcal{M}) = \mathcal{K}(\mathbf{St}/\mathcal{M}) \otimes_{\mathcal{K}(\mathbf{St}/\mathbb{C})} \mathbb{C}(t)$$

qui est le  $\mathbb{C}(t)$ -espace vectoriel engendré par les classes d'isomorphisme d'objets  $[\mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{M}] \in \mathcal{K}(\mathbf{St}/\mathcal{M})$  modulo les relations i) et ii) dans la définition 2.3 et la relation

$$[Y \times_{\mathbb{C}} \mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{F} \circ \pi_{\mathcal{X}}} \mathcal{M}] = \Upsilon([Y])[ \mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{M}]$$

où  $Y$  est une  $\mathbb{C}$ -variété quasi-projective vue comme un champ.

On définit une structure d'anneau dans  $\mathcal{K}(\mathbf{St}/\mathcal{M})$ , pour cela, on utilisera le champ  $\mathcal{M}^{(2)}$ . Spécifiquement, soient  $[\mathcal{X}_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_1} \mathcal{M}]$  et  $[\mathcal{X}_2 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} \mathcal{M}]$  deux éléments dans  $\mathcal{K}(\mathbf{St}/\mathcal{M})$ , leur produit est défini par

$$[\mathcal{X}_1 \xrightarrow{\mathcal{F}_1} \mathcal{M}] * [\mathcal{X}_2 \xrightarrow{\mathcal{F}_2} \mathcal{M}] = [\mathcal{Z} \xrightarrow{a_2 \circ \mathcal{H}} \mathcal{M}]$$

où  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{H}$  sont définis par le diagramme du produit fibré

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Z} & \xrightarrow{\mathcal{H}} & \mathcal{M}^{(2)} & \xrightarrow{a_2} & \mathcal{M} \\ \mathcal{G} \downarrow & & & \downarrow (a_1, a_3) & \\ \mathcal{X}_1 \times_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_2 & \xrightarrow{\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2} & \mathcal{M} \times_{\mathbb{C}} \mathcal{M} & & \end{array}$$

qu'on appelle *convolution par*  $\mathcal{M}^{(2)}$ .

**Théorème 2.2.** *Le produit  $*$ , qu'on appelle produit de convolution, donne à  $\mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathcal{M})$  la structure d'une  $\mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathbb{C})$ -algèbre associative dont l'unité est*

$$1 = [\mathcal{M}_0 \hookrightarrow \mathcal{M}]$$

où  $\mathcal{M}_0 \simeq \text{Spec}(\mathbb{C})$  est le champ de représentations de vecteur de dimension 0.

*Démonstration.* Rappelons que le lemme 2.3, on a démontré que  $\mathcal{M}^{(2)}$  est algébrique. Comme  $\mathcal{X}_1 \times_{\mathbb{C}} \mathcal{X}_2$  est de type fini, la partie ii) du lemme 2.3 implique que  $\mathcal{Z}$  est algébrique et aussi de type fini. D'autre part, comme  $\mathcal{M}$ ,  $\mathcal{M}^{(2)}$  et  $\mathcal{X}_i$  ont tous des stabilisateurs affines, et le produit fibré des schémas affines au-dessus d'un schéma affine reste affine, on déduit que  $\mathcal{Z}$  a des stabilisateurs affines aussi. Ainsi,  $[\mathcal{Z} \xrightarrow{a_2 \circ \mathcal{H}} \mathcal{M}]$  définit un objet de  $\mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathcal{M})$ . Une preuve similaire à celle de la proposition 2.7 et [14, Lemma 92.6.4.] (qui dit qu'être un morphisme representable est stable par changement de base) montre que  $*$  respecte les relations de ciseaux et des fibrations de Zariski. Pour l'associativité on recommande de consulter [3, Théorème 4.3].  $\square$

*Remarque 2.2.* Le produit de convolution défini est compatible aussi avec la structure de  $\mathbb{C}(t)$ -algèbre de  $\mathcal{K}_{\Upsilon}(\mathbf{St} / \mathcal{M})$ , car elle est trivialement compatible avec celle de  $\mathcal{K}(\mathbf{St} / \mathbb{C})$ -algèbre. On note  $H(Q, I)$  la  $\mathbb{C}(t)$ -algèbre  $(\mathcal{K}_{\Upsilon}(\mathbf{St} / \mathcal{M}), *)$ .

## 2.3 L'algèbre de Lie $\hat{H}(Q, I)$

Considérons à nouveau le groupe abélien libre  $N$  de rang  $|Q_0|$  avec générateurs  $\{n_i\}_{i \in Q_0}$  de la section 2.1. On considère aussi le morphisme de monoïdes

$$\delta : N^{\oplus} \rightarrow \mathbb{N},$$

qui à chaque  $n = \sum_{i \in Q_0} \lambda_i n_i$  associe  $\delta(n) = \sum_{i \in Q_0} \lambda_i$ .

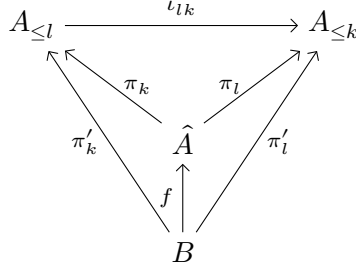
Soit maintenant une algèbre  $N$ -graduée associative

$$A = \bigoplus_{n \in N^{\oplus}} A_n,$$

où les  $A_n$  sont des sous-groupes de  $A$  tels que  $A_n \cap A_m = \{0\}$  si  $n \neq m$  et  $A_n \cdot A_m \subseteq A_{n+m}$ . Pour chaque  $k \geq 1$  on considère l'idéal  $A_{>k} = \bigoplus_{\delta(n) > k} A_n$  et le quotient  $A_{\leq k} = A/A_{>k}$ , l'inclusion  $A_{>k} \subset A_{>l}$  pour  $l \leq k$  induit un morphisme d'algèbres

$$\iota_{lk} : A_{\leq k} \rightarrow A_{\leq l}.$$

Rappelons que la limite projective d'un ensemble de flèches  $\{\iota_{lk}\}_{l \leq k}$  comme ceci est une algèbre  $\hat{A}$  dotée de morphismes  $\pi_k : \hat{A} \rightarrow A_{\leq k}$  tel que, pour tout  $l \leq k$ ,  $\iota_{lk} \circ \pi_k = \pi_l$ .  $\hat{A}$  est universelle pour cette propriété : si  $B$  est un autre algèbre munie des morphismes  $\pi'_k : B \rightarrow A_{\leq k}$  tels que  $\iota_{lk} \circ \pi'_k = \pi'_l$  pour tout  $l \leq k$ , alors il existe un unique morphisme  $f : B \rightarrow \hat{A}$  tel que le diagramme



soit commutatif.

En particulier, il existe un morphisme injectif  $A \hookrightarrow \hat{A}$ , fait qui lui donne le nom de *complétion* de  $A$ . Toutes ces algèbres peuvent être vues comme des algèbres de Lie avec le crochet défini par le commutateur. Considérons maintenant la sous-algèbre  $\mathfrak{g} = A_{>0}$ , ainsi que les algèbres quotient correspondantes  $\mathfrak{g}_{\leq k} = A_{>0}/A_{>k}$  pour  $k \geq 0$ . Chaque  $\mathfrak{g}_{\leq k}$  est une algèbre de Lie nilpotente, si  $x \in A_{>k}$  et  $y \in A_{>l}$ , alors  $[x, y] \in A_{>l+k}$  où  $l+k > l, k$  si  $l, k > 0$ . De ce fait, l'algèbre complétée  $\hat{\mathfrak{g}}$  est une algèbre de Lie pro-nilpotente, comme limite projective d'algèbres de Lie nilpotentes.

Soit  $\hat{G}$  le groupe de Lie associé à  $\hat{\mathfrak{g}}$ , et  $\exp : \hat{\mathfrak{g}} \rightarrow \hat{G}$  le morphisme exponentiel correspondant. Il existe un isomorphisme  $\hat{G} \simeq 1 + \hat{\mathfrak{g}} \hookrightarrow \hat{A}$ , qui à chaque  $g \in \hat{G}$  associe la série exponentielle de  $\exp^{-1}(g)$  dans  $\hat{A}$ .

**Proposition 2.9.** *L'algèbre associative  $H(Q, I)$  est  $N$ -graduée et*

$$H(Q, I) = \bigoplus_{d \in N^{\oplus}} H(Q, I)_d$$

où  $H(Q, I)_d$  est la  $\mathbb{C}(t)$ -algèbre  $\mathcal{K}_{\mathcal{T}}(\mathbf{St} / \mathcal{M}_d)$ .

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{X}$  un champ algébrique de type fini et de stabilisateurs affines, et soit  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$  un morphisme. Comme  $\mathcal{M} = \bigcup_{d \in N^{\oplus}} \mathcal{M}_d$ , dans  $H(Q, I)$  on a l'égalité

$$[\mathcal{X} \xrightarrow{\mathcal{F}} \mathcal{M}] = \sum_{d \in N} [\mathcal{X}_d \xrightarrow{\mathcal{F}_d} \mathcal{M}_d]$$

où les  $\mathcal{X}_d$  sont les produits fibrés correspondant aux diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{X}_d = \mathcal{X} \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_d & \xrightarrow{\pi_{\mathcal{X}}} & \mathcal{X} \\
\mathcal{F}_d \downarrow & & \downarrow \mathcal{F} \\
\mathcal{M}_d & \hookrightarrow & \mathcal{M}
\end{array}
,$$

car les  $\mathcal{X}_d$  sont des ouverts (fermés) disjoints de  $\mathcal{X}$  tels que  $\mathcal{X} = \bigcup_{d \in N^{\oplus}} \mathcal{X}_d$ . La somme est finie car  $\mathcal{X}$  est de type fini, donc quasi-compact.  $\square$

On définit la sous-algèbre de Lie

$$\mathfrak{g}_{\text{Hall}} = H(Q, I)_{>0}$$

ainsi que les algèbres complétées associées  $\hat{\mathfrak{g}}_{\text{Hall}} \subset \hat{H}(Q, I)$ . On note  $\hat{G}_{\text{Hall}}$  le groupe de Lie correspondant à  $\hat{\mathfrak{g}}_{\text{Hall}}$ , avec l'identification

$$\hat{G}_{\text{Hall}} \simeq [\mathcal{M}_0 \hookrightarrow \mathcal{M}] + \hat{\mathfrak{g}}_{\text{Hall}} \subset \hat{H}(Q, I)$$

On peut penser à  $\hat{H}(Q, I)$  comme l'algèbre qui admet des «*sommes infinies*»  $\sum_{d \in \mathbb{N}} [\mathcal{X}_d \rightarrow \mathcal{M}_d]$ . Par exemple, si  $\mathcal{X}$  est un champ de stabilisateurs affines et  $\mathcal{F} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}$  un morphisme tels que chaque  $\mathcal{X}_d$ , comme défini dans la preuve de la proposition précédente, est de type fini, alors les morphismes

$$\mathcal{F}_{\leq k} : \bigcup_{\delta(d) \leq k} \mathcal{X}_d \rightarrow \mathcal{M}$$

définissent des champs de type fini et stabilisateurs affines, compatibles avec les projections vers  $H(Q, I)_{\leq k}$ . On obtient donc un élément de l'algèbre de Hall complétée, qu'on dénotera

$$[\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}] \in \hat{H}(Q, I)$$

Cet élément peut être identifié à un élément du groupe  $\hat{G}_{\text{Hall}}$  précisément si  $\mathcal{X}_0 \simeq \mathcal{M}_0$ .



## Chapitre 3

# Le diagramme de diffusion de Hall

Dans ce chapitre on introduit les diagrammes de diffusion comme décrits dans [2]. On fait un petit rappel sur les conditions de stabilité associées à un carquois à relations  $(Q, I)$  décrites par première fois par A. King dans [11] et puis étendues dans les travaux de Bridgeland ; et on démontre quelques propriétés sur la catégorie  $\text{mod}(Q, I)$  associée à cette notion. Le résultat le plus important se trouve dans la section 3.2.1, où on démontre l'existence d'un diagramme de diffusion à valeurs dans l'algèbre de Hall motivique  $\hat{H}(Q, I)$  et dont le support consiste en tous les  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$  tel qu'il existe un module  $\theta$ -semistable. On conclut le chapitre avec des exemples des autres applications de  $\hat{H}(Q, I)$ .

### 3.1 Diagrammes de diffusion

Soit  $N$  le groupe abélien libre de la section 2. On note

$$M = \text{Hom}(N, \mathbb{Z}) \text{ et } M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}.$$

On rappelle aussi que  $N^{\oplus}$  est le sous-ensemble d'éléments de  $N$  de partie positive, et on note  $N^+ = N^{\oplus} \setminus \{0\}$ . On considère aussi le cône dual

$$M_{\mathbb{R}}^+ = \{\theta \in M_{\mathbb{R}} \mid \theta(n) > 0 \text{ pour tout } n \in N^+\}$$

ainsi que les ensembles

$$M^+ = M_{\mathbb{R}}^+ \cap M, \quad M^{\oplus} = M^+ \cup \{0\}, \quad M_{\mathbb{R}}^- = -M_{\mathbb{R}}^+.$$

On fixe une algèbre de Lie  $N^+$ -graduée  $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in N^+} \mathfrak{g}_n$ . On supposera souvent que  $\mathfrak{g}$  est une algèbre nilpotente. On note  $G$  le groupe de Lie associé et

$$\exp : \mathfrak{g} \rightarrow G$$

le morphisme bijectif associé.

**Définition 3.1.** Un sous-ensemble  $\sigma \subset M_{\mathbb{R}}$  est un *cône* s'il est convexe, rationnel et polyédral, c'est-à-dire, s'il est de la forme

$$\sigma = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i m_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \right\}$$

avec  $m_i \in M$   $i = 1, \dots, p$  fixes.

La *codimension* d'un cône  $\sigma$  est la codimension du sous-espace vectoriel  $\text{Span}(\sigma) \subset M_{\mathbb{R}}$ . On dit que cône  $\mathfrak{d}$  est un *mur* s'il est de codimension 1. Un sous-ensemble de la forme

$$\sigma \cap n^{\perp} = \{\theta \in \sigma \mid \theta(n) = 0\}$$

avec  $n \in N$  est dit une *face* de  $\sigma$ . Toute face est un cône, et toute intersection de faces l'est aussi.

*Remarque 3.1.* On peut décrire un cône comme l'intersection des demi-espaces, soit  $n_i \in N$  avec  $i = 1, \dots, q$ , alors

$$\sigma = \{\theta \in M_{\mathbb{R}} \mid \theta(n_i) \geq 0 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq q\}.$$

**Définition 3.2.** Un *éventail de cônes*, dit parfois juste *éventail*, dans  $M_{\mathbb{R}}$  est une collection finie  $\mathfrak{S} = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  de cônes tel que

- i) Toute face d'un cône dans  $\mathfrak{S}$  est aussi dans  $\mathfrak{S}$ .
- ii) L'intersection de n'importe quels deux cônes est une face de chacun.

Le support d'un éventail est le sous-ensemble fermé

$$\text{supp}(\mathfrak{S}) = \bigcup_{\sigma \in \mathfrak{S}} \sigma \subset M_{\mathbb{R}}.$$

**Exemple 3.1.** Soit  $P \subset N^+$  un sous-ensemble fini, et soit  $P = P_+ \sqcup P_0 \sqcup P_-$  une partition de  $P$  en sous ensembles disjoints. Pour tout ensemble  $P$  et une partition on associe un cône

$$\sigma(P_+, P_0, P_-) = \{\theta \in M_{\mathbb{R}} \mid \theta(n) = 0 \text{ pour } n \in P_0 \text{ et } \pm \theta(n) \geq 0 \text{ pour } n \in P_{\pm}\}$$

L'ensemble de cônes obtenu en considérant tous les partitions de  $P$  est un éventail qu'on note  $\mathfrak{S}(P)$ .

Soit  $\sigma \subset M_{\mathbb{R}}$  un cône. On définit la sous-algèbre de Lie

$$\mathfrak{g}(\sigma) = \bigoplus_{n \in N^+ \cap \sigma^{\perp}} \mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{g}$$

où  $\sigma^{\perp} = \{n \in N \mid \theta(n) = 0 \text{ pour tout } \theta \in \sigma\}$ .

**Définition 3.3.** Un  *$\mathfrak{g}$ -éventail*  $\mathfrak{D} = (\mathfrak{S}, \phi)$  est la donnée d'un éventail  $\mathfrak{S}$  dans  $M_{\mathbb{R}}$  muni d'un choix d'éléments  $\phi(\mathfrak{d}) \in \mathfrak{g}(\mathfrak{d})$  pour chaque mur  $\mathfrak{d}$ . Le support essentiel de un  $\mathfrak{g}$ -éventail  $\mathfrak{D}$  est le sous-ensemble

$$\text{supp}_{\text{ess}}(\mathfrak{D}) = \bigcup_{\substack{\mathfrak{d} \in \mathfrak{S} \\ \phi(\mathfrak{d}) \neq 0}} \mathfrak{d} \subset \text{supp}(\mathfrak{S})$$

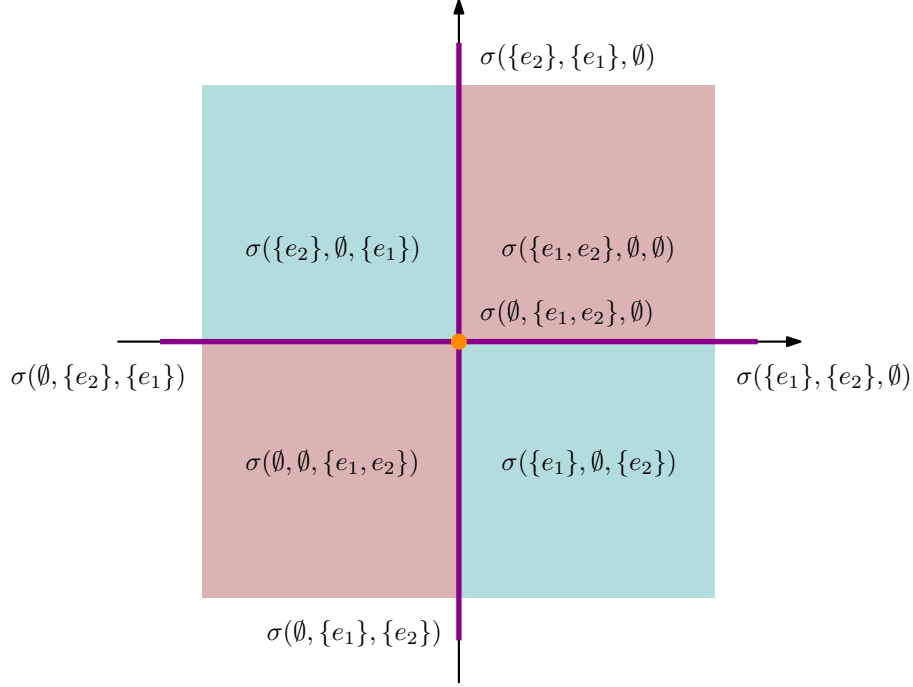


FIGURE 3.1 – Exemple de  $\mathfrak{S}(P)$  pour  $N \simeq \mathbb{Z}^{\oplus 2}$  et  $P = \{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$ . Dans cet exemple, les murs sont les demi-droites dessinées en violet.

**Définition 3.4.** Soit  $\mathfrak{D} = (\mathfrak{S}, \phi)$  un  $\mathfrak{g}$ -éventail et  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M_{\mathbb{R}}$  un chemin lisse. On dit que  $\gamma$  est  $\mathfrak{D}$ -générique si

- i) Les points  $\gamma(1)$  et  $\gamma(0)$  ne sont pas dans le support essentiel de  $\mathfrak{D}$ .
- ii) On a que  $\gamma([0, 1]) \cap \sigma = \emptyset$  pour tout cône  $\sigma$  de codimension  $> 1$ .
- iii) Tous les intersections de  $\gamma$  avec des murs de  $\mathfrak{S}$  sont transversales, c'est-à-dire, si  $\gamma(t) \in \mathfrak{d}$  pour  $t \in [0, 1]$ , alors  $\gamma'(t) \perp \mathfrak{d}$ .

*Remarque 3.2.* Par définition un  $\mathfrak{g}$ -éventail  $\mathfrak{D} = (\mathfrak{S}, \phi)$  ne consiste que d'un nombre fini de murs, et comme les intersections d'un chemin  $\mathfrak{D}$ -générique  $\gamma$  avec eux sont transversales, il existe un nombre fini de points  $0 < t_1 < \dots < t_k < 1$  pour lesquels  $\gamma(t_i)$  appartient au support essentiel de  $\mathfrak{D}$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ . On note  $\mathfrak{d}_i \in \mathfrak{S}$  les murs tels que  $\gamma(t_i) \in \mathfrak{d}_i$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ .

On suppose maintenant que  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie nilpotente. Soit  $\mathfrak{D} = (\mathfrak{S}, \phi)$  un  $\mathfrak{g}$ -éventail et  $\mathfrak{d}$  un mur dans  $\mathfrak{S}$ , on définit l'élément

$$\Phi_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{d}) = \exp(\phi(\mathfrak{d})) \in G$$

et si  $\gamma$  est un chemin  $\mathfrak{g}$ -générique, on construit le produit

$$\Phi_{\mathfrak{D}}(\gamma) = \prod_{i=1}^k \Phi_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{d}_{k+1-i})^{\epsilon_i},$$

où  $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$  est le signe de la dérivée en  $t_i$  de la fonction  $\gamma(n_i) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui à chaque  $t \in [0, 1]$  associe  $\gamma(t)(n_i) \in \mathbb{R}$ , où  $n_i \in N$  est tel que  $\mathfrak{d}_i \subset n_i^{\perp}$ .

**Définition 3.5.** On dit que deux  $\mathfrak{g}$ -éventails  $\mathfrak{D}_1$  et  $\mathfrak{D}_2$  sont *équivalents* si pour tout chemin  $\gamma$  qui est à la fois  $\mathfrak{D}_1$  et  $\mathfrak{D}_2$ -générique, on a

$$\Phi_{\mathfrak{D}_1}(\gamma) = \Phi_{\mathfrak{D}_2}(\gamma).$$

D'autre part, on dit qu'un  $\mathfrak{g}$ -éventail  $\mathfrak{D}$  est *cohérent*, si pour tout chemins  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  tels que  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$  et  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ , alors

$$\Phi_{\mathfrak{D}}(\gamma_1) = \Phi_{\mathfrak{D}}(\gamma_2).$$

Considérons maintenant  $f : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  un morphisme d'algèbres de Lie  $N^+$ -graduées et un  $\mathfrak{g}$ -éventail  $\mathfrak{D} = (\mathfrak{S}, \phi)$ ,  $f$  induit un  $\mathfrak{h}$ -éventail

$$f_*(\mathfrak{D}) = (\mathfrak{S}, f \circ \phi).$$

On revient maintenant au cas où  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie  $N^+$  graduée quelconque. Comme dans la section 2.3, pour tout  $l \leq k$  dans  $\mathbb{N}_{>0}$ , on considère les morphismes

$$\iota_{lk} : \mathfrak{g}_{\leq k} \rightarrow \mathfrak{g}_{\leq l}$$

où  $\mathfrak{g}_k$  sont les algèbres de Lie tronquées au niveau  $k$ . On considère aussi

$$\hat{\mathfrak{g}} = \lim_{\leftarrow} \mathfrak{g}_{\leq k}$$

la limite projective correspondante. On a la définition suivante.

**Définition 3.6.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie  $N^+$ -graduée quelconque. Un  $\hat{\mathfrak{g}}$ -éventail  $\mathfrak{D}$  est une suite de  $\mathfrak{g}_{\leq k}$ -éventails  $\{\mathfrak{D}_{\leq k}\}_{k \geq 1}$ , tel que pour tout  $l \leq k$  les  $\mathfrak{g}_{\leq l}$ -éventails  $(\iota_{lk})_*(\mathfrak{D}_{\leq k})$  et  $\mathfrak{D}_{\leq l}$  soient équivalents. On dit que  $\mathfrak{D}$  est cohérent si chaque  $\mathfrak{D}_{\leq k}$  l'est. Si  $\mathfrak{D}'$  est un autre  $\hat{\mathfrak{g}}$ -éventail, on dit qu'il est équivalent à  $\mathfrak{D}$  si pour tout  $k \geq 1$ ,  $\mathfrak{D}_{\leq k}$  et  $\mathfrak{D}'_{\leq k}$  le sont.

On écrit aussi

$$\text{supp}(\mathfrak{D}) = \bigcup_{k \geq 1} \text{supp}(\mathfrak{D}_{\leq k}) \text{ et } \text{supp}_{\text{ess}}(\mathfrak{D}) = \bigcup_{k \geq 1} \text{supp}_{\text{ess}}(\mathfrak{D}_{\leq k}).$$

### 3.1.1 Résultat de reconstruction

On commence cette section en remarquant que si  $\mathfrak{D} = (\mathfrak{S}, \phi)$  est un  $\mathfrak{g}$ -éventail cohérent, alors pour tout  $\theta_1, \theta_2 \in M_{\mathbb{R}} \setminus \text{supp}_{\text{ess}}(\mathfrak{D})$  il existe un élément bien défini

$$\Phi_{\mathfrak{D}}(\theta_1, \theta_2),$$

obtenu comme  $\Phi_{\mathfrak{D}}(\gamma)$  pour n'importe quel chemin lisse  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{g}$ -générique tel que  $\gamma(0) = \theta_1$  et  $\gamma(1) = \theta_2$ . On a aussi que

$$\text{supp}_{\text{ess}}(\mathfrak{D}) \cap M_{\mathbb{R}}^{\pm} = \emptyset,$$

car un mur  $\mathfrak{d} \in \mathfrak{S}$  satisfait toujours que  $\mathfrak{d} \subset n^{\perp}$  pour certain  $n \in N$ , et si  $\phi(\mathfrak{d}) \neq 0$  alors  $n \in N^+$  et  $M_{\mathbb{R}}^{\pm} \cap \mathfrak{d} = \emptyset$ . On en déduit que tout  $\mathfrak{g}$ -éventail  $\mathfrak{D}$  a un élément associé

$$\Phi_{\mathfrak{D}} = \Phi_{\mathfrak{D}}(\theta_+, \theta_-),$$

où  $\theta_{\pm} \in M_{\mathbb{R}}^{\pm}$ .

Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$  on définit les sous-algèbres de Lie suivantes

$$\mathfrak{g}_{\pm}(\theta) = \bigoplus_{\substack{n \in N^+ \\ \pm\theta(n) > 0}} \mathfrak{g}_n \quad \text{et} \quad \mathfrak{g}_0(\theta) = \bigoplus_{\substack{n \in N^+ \\ \theta(n) = 0}} \mathfrak{g}_n$$

qui définissent une décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_-(\theta) \oplus \mathfrak{g}_0(\theta) \oplus \mathfrak{g}_+(\theta).$$

Si  $\mathfrak{g}$  est nilpotente, on peut considérer son groupe de Lie associé  $G$ , ainsi que ses sous-groupes

$$G_{\pm} = \exp(\mathfrak{g}_{\pm}) \quad \text{et} \quad G_0 = \exp(\mathfrak{g}_0).$$

La décomposition de  $\mathfrak{g}$  et la formule de Baker–Campbell–Hausdorff nous disent que pour tout  $g \in G$  il existent des uniques  $g_{\pm} \in G_{\pm}$  et  $g_0 \in G_0$  tels que

$$g = g_- \cdot g_0 \cdot g_+,$$

ce qui nous permet de définir des applications

$$\Pi_{\pm}^{\theta} : G \rightarrow G_{\pm} \quad \text{et} \quad \Pi_0^{\theta} : G \rightarrow G_0$$

qui associent à  $g \in G$  son facteur correspondant.

**Lemme 3.1.** [2, Lemme 3.1] *Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie nilpotente et soit  $\mathfrak{D} = (\mathfrak{S}, \phi)$  un  $\mathfrak{g}$ -éventail cohérent. Alors, pour tout  $\mathfrak{d}$  et tout point  $\theta$  dans l'intérieur relative de  $\mathfrak{d}$  (c'est-à-dire, son intérieur en tant que sous-ensemble fermé de  $\text{Span}(\mathfrak{d})$ ), on a la relation*

$$\Phi_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{d}) = \Pi_0^{\theta}(\Phi_{\mathfrak{D}}).$$

*Remarque 3.3.* En particulier, on a que la classe d'équivalence d'un  $\mathfrak{g}$ -éventail est déterminé par l'élément  $\Phi_{\mathfrak{D}} \in G$ .

Supposons maintenant qu'il existe un sous-ensemble fini  $P \subset N^+$  tel que

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \in P} \mathfrak{g}_n.$$

Dans ce cas on dit que  $\mathfrak{g}$  est de décomposition finie et, en particulier,  $\mathfrak{g}$  est nilpotente. Considérons l'éventail  $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(P)$  définie dans l'exemple 3.1. Si  $\mathfrak{d} \in \mathfrak{S}$  est un mur, il est de la forme  $\sigma(P_+, P_0, P_-)$  avec  $|P_0| = 1$ . Son intérieur relative comprend les  $\theta \in \mathfrak{d}$  tels que  $\theta(n) \neq 0$  pour tout  $n \notin P_0$ . On en déduit que pour tout  $\theta$  dans l'intérieur relative de  $\mathfrak{d}$  on a la décomposition

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_-(\theta) \oplus \mathfrak{g}_0(\theta) \oplus \mathfrak{g}_+(\theta)$$

et que  $\mathfrak{g}_0(\theta) = \mathfrak{g}(\mathfrak{d})$  car  $P$  est fini. Dans ce cas, pour tout  $g \in G$  on peut définir un  $\mathfrak{g}$ -éventail  $\mathfrak{D}(g) = (\mathfrak{S}, \phi)$  en posant

$$\Phi_{\mathfrak{D}(g)} = \Pi_0^{\theta}(g),$$

où  $\theta \in \mathfrak{d}$  est n'importe quel point dans l'intérieur relative de  $\mathfrak{d}$ .

**Lemme 3.2.** [2, Lemme 3.2] Le  $\mathfrak{g}$ -éventail  $\mathfrak{D}(g)$  est cohérent et satisfait que  $\Phi_{\mathfrak{D}(g)} = g$ .

**Proposition 3.1.** [2, Proposition 3.3] Supposons que  $\mathfrak{g}$  est une algèbre de Lie de décomposition fini. L'application

$$\mathfrak{D} \mapsto \Phi_{\mathfrak{D}}$$

défini une bijection entre les classes d'équivalence de  $\mathfrak{g}$ -éventails consistants et éléments du groupe  $G$ .

On considère maintenant un algèbre de Lie  $N^+$ -graduée  $\mathfrak{g}$ , pas nécessairement nilpotente, et  $\mathfrak{D} = \{\mathfrak{D}_{\leq k}\}_{k \geq 1}$  un  $\hat{\mathfrak{g}}$ -éventail. On peut appliquer tous les résultats précédents aux algèbres  $\mathfrak{g}_{\leq k}$  car elles sont clairement de décomposition finie. Soit  $\theta_1$  et  $\theta_2$  deux points dans  $M_{\mathbb{R}} \setminus \text{supp}_{\text{ess}(\mathfrak{D})}$ , on obtient alors des éléments  $\Phi_{\mathfrak{D}_{\leq k}} \in G_{\leq k}$  qui satisfaisaient

$$\iota_{lk}(\Phi_{\mathfrak{D}_{\leq k}}) = \Phi_{\mathfrak{D}_{\leq l}},$$

car par définition  $(\iota_{lk})_*(\mathfrak{D}_{\leq k})$  et  $\mathfrak{D}_{\leq l}$  sont équivalents. On peut donc associer à  $\{\Phi_{\mathfrak{D}_{\leq k}}(\theta_1, \theta_2)\}$  un élément

$$\Phi_{\mathfrak{D}}(\theta_1, \theta_2) \in \hat{G}.$$

En particulier, en prenant  $\theta_1 \in M_{\mathbb{R}}^+$  et  $\theta_2 \in M_{\mathbb{R}}^-$  on obtient un élément bien définie  $\Phi_{\mathfrak{D}} \in \hat{G}$ . Par définition, une classe d'équivalence de  $\hat{\mathfrak{g}}$ -éventails est une suite de classes d'équivalence de  $\mathfrak{g}_{\leq k}$ -éventails, on déduit de la proposition 3.1 que :

**Proposition 3.2.** L'application  $\mathfrak{D} \mapsto \Phi_{\mathfrak{D}}$  défini une bijection entre les classes d'équivalence de  $\hat{\mathfrak{g}}$ -éventails consistants et éléments du groupe  $\hat{G}$ .

Dans [7], les auteurs ont démontré que si on suppose que la sous-algèbre de Lie

$$\mathfrak{g}_{\langle n \rangle} = \bigoplus_{k \geq 0} \mathfrak{g}_{kn} \subset \mathfrak{g}$$

est abélienne pour tout  $n \in N^+$ , alors les classes d'équivalence de diagrammes de diffusion (définies aussi dans [7]) sont aussi en bijection avec des éléments de  $\hat{G}$ . On en déduit que, avec cette hypothèse supplémentaire sur  $\mathfrak{g}_{\langle n \rangle}$ , les  $\hat{\mathfrak{g}}$ -éventails coïncident avec les diagrammes de diffusion à équivalence près.

## 3.2 Conditions de stabilité

Introduites par première fois dans le contexte de la théorie de représentations de carquois par A.D. King dans [11], les conditions de stabilité sont devenues un sujet de recherche très actif, en partie grâce à leur connections avec la géométrie algébrique. Dans [2], T. Bridgeland a pu lier les conditions de stabilité avec le diagramme de diffusion associé à un carquois, via l'algèbre de Hall motivique.

Dans cette section on reprend la notation de la section 2.1 et 2.3. Soit  $E \in \text{mod}(Q, I)$ , et  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ . On rappelle l'existence d'un morphisme  $d : \mathcal{K}(\text{mod}(Q, I)) \rightarrow N$ , qui nous permet d'écrire

$$\theta(E) = \theta(d([E])),$$

où  $[E]$  corresponde à la classe d'isomorphisme de  $E$  dans  $\mathcal{K}(\text{mod}(Q, I))$ .

**Définition 3.7.** Soit  $(Q, I)$  un carquois à relation et  $M_{\mathbb{R}}$  comme dans la section 2.1. Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ , on dit qu'un objet  $E \in \text{mod}(Q, I)$  est  $\theta$ -semistable si

- i)  $\theta(E) = 0$ ,
- ii) pour tout sous-module  $A \subset E$  satisfait que  $\theta(A) \leq 0$ .

Pour  $k \geq 1$  on définit  $\text{mod}(Q, I)_{\leq k}$  comme la sous-catégorie pleine de  $\text{mod}(Q, I)$  dont les objets sont des représentations dont la dimension totale est  $\leq k$ , c'est-à-dire, les représentations  $E$  telles que

$$\delta(d([E])) \leq k.$$

On définit aussi le sous-ensemble de  $M_{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{W}_{\leq k} = \{\theta \in M_{\mathbb{R}} \mid \text{il existe un objet } \theta\text{-semistable } E \neq 0 \in \text{mod}(Q, I)_{\leq k}\}.$$

**Lemme 3.3.** [2, Lemme 6.2] Il existe un éventail  $\mathfrak{S}_{\leq k}$  dans  $M_{\mathbb{R}}$  tel que

$$\mathcal{W}_{\leq k} = \text{supp}(\mathfrak{S}_{\leq k}).$$

En particulier,  $\mathcal{W}_{\leq k}$  est un sous-ensemble fermé.

*Démonstration.* Considérons l'ensemble fini

$$P = \{n \in N^+ \mid \delta(n) \leq k\},$$

ainsi que l'éventail  $\mathfrak{S}(P)$  défini dans l'exemple 3.1. Soit  $E \in \text{mod}(Q, I)_{\leq k}$  un objet quelconque différent de 0, et soit  $\theta \in \text{Int}_{rel}(\sigma(P_+, P_0, P_-)) = \text{Int}_{rel}(\sigma)$  pour une certaine partition de  $P$ . Dans ce cas,  $\theta$  satisfait que  $\pm\theta(n) > 0$  pour tout  $n \in P_{\pm}$ . On pose  $d = d([E]) \in P$  le vecteur de dimension associé à  $E$ , on a deux cas, soit  $d \in P_0$ , soit  $d \in P_- \cup P_+$ . Dans le deuxième cas,  $\theta(d) \neq 0$  et  $E$  n'est pas  $\theta$ -semistable pour aucun  $\theta$  dans l'intérieur relatif de  $\sigma$ . Dans l'autre cas,

$$\theta(E) = 0$$

pour tout  $\theta \in \sigma$ . Soit maintenant  $A$  un sous-module de  $E$  non nul. Si  $d([A]) \in P_+$ , alors  $\theta(A) > 0$  pour tout  $\theta \in \text{Int}_{rel}(\sigma)$ , et  $E$  n'est pas semistable pour aucun des  $\theta$  dans  $\text{Int}_{rel}(\sigma)$ . Comme il n'y a qu'un nombre fini de vecteurs de dimension possibles pour un sous-module  $0 \neq A \subset E$ , on déduit que la semi-stabilité de  $E$  est constante à l'intérieur de  $\sigma$ . On peut définir un sous-éventail  $\mathfrak{S}_{\leq k} \subset \mathfrak{S}(P)$  formé des cônes  $\sigma = \sigma(P_+, P_0, P_-)$  tels qu'il existe un objet  $E$  qui est  $\theta$ -semistable pour (tout)  $\theta \in \text{Int}_{rel}(\sigma(P_+, P_0, P_-))$ . En particulier,  $\mathcal{W}_{\leq k} = \text{supp}(\mathfrak{S}_{\leq k})$ .  $\square$

Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ , on définit aussi la sous-catégorie pleine  $\text{mod}(Q, I)_{\theta} \subset \text{mod}(Q, I)$  dont les objets sont des représentations  $\theta$ -semistables. La proposition suivante regroupe quelques propriétés importantes de  $\text{mod}(Q, I)_{\theta}$ .

**Proposition 3.3.** Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ . La catégorie  $\text{mod}(Q, I)_{\theta}$  est abélienne, elle est stable par extensions et l'inclusion  $\text{mod}(Q, I)_{\theta} \subset \text{mod}(Q, I)$  est un foncteur exact et les objets simples de  $\text{mod}(Q, I)_{\theta}$  sont les représentations  $\theta$ -stables, c'est-à-dire, les représentations  $\theta$ -semistables  $E$  telles que tout sous-module  $0 \neq A \subset E$  satisfait que  $\theta(A) < 0$ .

*Démonstration.* Soit  $0 \rightarrow E_1 \xrightarrow{a} E_2 \xrightarrow{b} E_3 \rightarrow 0$  une suite exacte dans  $\text{mod}(Q, I)$ . Supposons que  $E_1$  et  $E_3$  sont  $\theta$ -semistables, on a d'abord que  $\theta(E_2) = \theta(E_1) + \theta(E_3) = 0$ . Soit  $A \subset E_2$  un sous-module, on obtient une suite exacte  $0 \rightarrow \text{Ker}(b|_A) \hookrightarrow A \xrightarrow{b|_A} b(A) \rightarrow 0$ . Comme  $b(A) \subset E_3$  et on peut identifier  $\text{Ker}(b|_A)$  à un sous-module de  $E_1$ , on déduit que  $\theta(A) = \theta(\text{Ker}(b|_A)) + \theta(b(A)) \leq 0$ . On obtient que  $E_2$  est  $\theta$ -semistable, et  $\text{mod}(Q, I)_\theta$  est stable par extension.

Pour démontrer que  $\text{mod}(Q, I)$  est abélienne, considérons un morphisme  $f : E \rightarrow F$  entre objets  $\theta$ -semistables. Comme avant, on obtient

$$\begin{aligned}\theta(\text{Ker}(f)) + \theta(\text{Im}(f)) &= \theta(E) = 0 \\ \theta(\text{Im}(f)) + \theta(\text{Coker}(f)) &= \theta(F) = 0.\end{aligned}$$

Cependant, en étant sous-modules de  $F$  et  $E$  respectivement, on a que  $\theta(\text{Im}(f)) \leq 0$  et  $\theta(\text{Ker}(f)) \leq 0$ , et donc  $\theta(\text{Im}(f)) = \theta(\text{Ker}(f)) = \theta(\text{Coker}(f)) = 0$ . Si  $A$  est un sous-module de  $\text{Ker}(f)$ , il est aussi un sous-module de  $E$ , ce qui entraîne que  $\theta(A) \leq 0$  et que  $\text{Ker}(f)$  est  $\theta$ -semistable. Soit  $B \subset \text{Coker}(f)$ , on peut l'identifier à un quotient  $B'/\text{Im}(f)$  avec  $B' \subset F$  qui satisfait  $\theta(B') \leq 0$  car  $F$  est  $\theta$ -semistable. De plus,  $0 \geq \theta(B') = \theta(\text{Im}(f)) + \theta(B) = \theta(B)$ , ce qui nous permet de conclure que  $\text{Coker}(f)$  est  $\theta$ -semistable.

Finalement, un objet  $E \in \text{mod}(Q, I)$  est simple si pour tout  $0 \neq A \subset E$ ,  $A$  n'est pas  $\theta$ -semistable, en particulier  $\theta(A) < 0$ , et on a le résultat.  $\square$

**Définition 3.8.** Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ . On définit une *fonction de stabilité*  $Z_\theta : \mathcal{K}(\text{mod}(Q, I)) \rightarrow \mathbb{C}$  par la formule

$$Z_\theta(E) = -\theta(E) + id(E)$$

en écrivant  $E$  à la place de  $[E]$  pour tout  $E \in \text{mod}(Q, I)$  pour simplifier la notation. On remarque que si  $E \neq 0$ , alors  $Z_\theta(E)$  appartient au demi-plan supérieur. On définit ainsi la phase de  $E \neq 0$  par

$$\phi(E) = (1/\pi)\arg(Z_\theta(E)).$$

On dit qu'un objet  $E \neq 0 \in \text{mod}(Q, I)$  est  $Z_\theta$ -semistable si tout sous-objet  $0 \neq A \subset E$  satisfait que

$$\phi(A) \leq \phi(E).$$

*Remarque 3.4.* Une représentation  $E \in \text{mod}(Q, I)$  est  $\theta$ -semistable ssi elle est  $Z_\theta$ -semistable et  $\phi(E) = 1/2$ .

**Proposition 3.4.** Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ . Les représentations  $Z_\theta$ -semistable de phase fixée forment une sous-catégorie abélienne  $\text{mod}(Q, I)_{Z_\theta}$  de  $\text{mod}(Q, I)$ .

*Démonstration.* On peut adapter facilement la preuve de la proposition 3.3 pour montrer le résultat. Par exemple, remarquons que si

$$0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow 0$$

est une suite exacte dans  $\text{mod}(Q, I)$ , alors

$$Z_\theta(E_2) = Z_\theta(E_1) = Z_\theta(E_3).$$

Si  $E_1, E_3$  ont la même phase, on déduit que  $E_2$  aussi, et on peut appliquer le même argument utilisé dans la proposition 3.3 pour montrer que  $\text{mod}(Q, I)_{Z_\theta}$  est stable par extensions. De même pour les noyaux et conoyaux.  $\square$



Dans la proposition suivant on démontre quelques propriétés liées à  $Z_\theta$  qui seront utiles pour la suite.

**Proposition 3.5.** *Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$  et  $Z_\theta$  sa fonction de stabilité associée. On a :*

- i) *Si  $E_1$  et  $E_2$  sont  $Z_\theta$ -semistables et  $\phi(E_1) > \phi(E_2)$  alors  $\text{Hom}(E_1, E_2) = 0$ .*
- ii) *Si  $0 \rightarrow E_1 \rightarrow E_2 \rightarrow E_3 \rightarrow 0$  est une suite exacte dans  $\text{mod}(Q, I)$  avec  $E_i \neq 0$  pour tout  $i = 1, 2, 3$ , alors*

$$\phi(E_3) \geq \phi(E_2) \geq \phi(E_1) \text{ ou } \phi(E_1) \geq \phi(E_2) \geq \phi(E_3),$$

$$\text{et } \phi(E_2) = \phi(E_1) \text{ ssi } \phi(E_2) = \phi(E_3).$$

*Démonstration.* La preuve de ii) suit directement du fait que  $Z_\theta(E_2) = Z_\theta(E_1) = Z_\theta(E_3)$ . Pour i), on remarque que si  $f : E_1 \rightarrow E_2$  est un morphisme différent de 0, alors  $\phi(\text{Ker}(f))$  et  $\phi(\text{Im}(f))$  sont bien définis et

$$\begin{aligned} \phi(\text{Ker}(f)) &\leq \phi(E) \\ \phi(\text{Coker}(f)) &\leq \phi(F) \end{aligned}$$

par la  $Z_\theta$ -semistabilité de  $E$  et  $F$ . La partie ii) implique que  $\phi(\text{Ker}(f)) \leq \phi(E) \leq \phi(\text{Im}(f)) \leq \phi(E_2)$ , ce qui nous donne le résultat.  $\square$

**Théorème 3.1.** *(Filtration de Harder-Narasimhan) Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$  et  $E \in \text{mod}(Q, I)$ . Il existe une filtration unique*

$$0 = E_0 \subsetneq E_1 \subsetneq \dots \subsetneq E_{m-1} \subsetneq E_m = E,$$

telle que  $E_i/E_{i-1}$  soit  $Z_\theta$ -semistable pour tout  $1 \leq i \leq m$  et

$$\phi(E_1) > \phi(E_2/E_1) > \dots > \phi(E/E_{m-1}).$$

*Démonstration.* On démontrera l'existence par récurrence sur la dimension totale de  $E$ . Si  $E$  est  $Z_\theta$ -semistable on a fini et la filtration de H-N est  $0 \subset E$ . Si ce n'est pas le cas, il existent des  $A \subset E$  tels que  $\phi(A) > \phi(E)$ , comme il n'existe qu'un nombre fini de vecteurs  $d$  qui correspondent à un sous-module de  $E$ , on peut choisir  $A$  de phase maximale. En particulier,  $A$  est  $Z_\theta$ -semistable, on pose  $E_1 = A$ . Par induction,  $E/A$  a une filtration de H-N

$$0 = E'_0 = E_1/A \subset E'_1 = E_2/A \subset \dots \subset E'_{m-1} = E_m/A \subset E'_m = E_{m+1}/A = E/A$$

telle que  $E'_i/E'_{i-1}$  soit semistable et  $\phi(E'_i/E'_{i-1}) > \phi(E'_{i+1}/E'_i)$  pour tout  $1 \leq i \leq m-1$ . Cependant  $E'_i/E'_{i-1} \simeq E_{i+1}/E_i$ , et pour pouvoir relever la filtration de  $E/A$  à une filtration de  $E$ , il reste à voir que  $\phi(A) > \phi(E_2/A)$ . Notons que  $A \subsetneq E_2 \subset E$ , et la dimension totale de  $E_2$  est strictement plus grande que celle de  $A$ . Par la maximalité du choix de  $A$ , on déduit que

$$\phi(E_2) < \phi(A).$$

D'après la proposition 3.5 ii), on obtient que

$$\phi(E_2/A) \leq \phi(E_2) < \phi(A).$$

Ainsi, la suite

$$0 = E_0 \subset E_1 = A \subset E_2 \subset \dots \subset E_m \subset E_{m+1} = E$$

est une filtration de H-N pour  $E$ . Pour démontrer l'unicité, considérons  $\{E'_j\}_{0 \leq j \leq p}$  une autre filtration de H-N de  $E$ . Par induction, il suffit montrer que  $A = E_1 = E'_1$ . Soit  $t$  le plus petit entier tel que  $E_1 \subset E'_t$ , qui existe car  $E_1 \subset E$ . Alors, la composition  $E_1 \hookrightarrow E'_t \rightarrow E'_t/E'_{t-1}$  est un morphisme non-nul, ce qui implique, d'après la partie i) de la proposition 3.5, que  $\phi(E_1) \leq \phi(E'_t/E'_{t-1}) < \phi(E'_1)$ . Par maximalité de  $A$ , on déduit que  $t = 1$  et  $\phi(E_1) = \phi(E'_1)$ , ce qui implique que  $E_1 = E'_1$ .  $\square$

*Remarque 3.5.* De la même façon que  $E_1$  satisfait une condition de maximalité parmi les sous-modules de  $E$  de phase  $> \phi(E)$ ,  $E_m$  est l'unique sous-module de  $E$  de dimension minimale parmi les sous-modules  $X$  de  $E$  tels que  $\phi(E/X)$  soit minimale.

Considérons désormais un intervalle  $I \subset ]0, 1[$ . On définit  $\mathcal{P}(I) \subset \text{mod}(Q, I)$  la sous-catégorie pleine et additive dont les objets sont des représentations  $E$  tels que les facteurs  $E_i/E_{i-1}$  de sa filtration de Harder-Narasimhan aient ses phases dans  $I$ . En particulier, si  $\phi \in ]0, 1[$ ,  $\mathcal{P}(\phi) = \mathcal{P}(\{\phi\})$  est la sous-catégorie abélienne des objets  $\mathbb{Z}_\theta$ -semistables de phase  $\phi$ .

**Lemme 3.4.** [2, Lemme 6.3] Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ . Pour tout intervalle  $I \subset (0, 1)$  il existe un sous-champs ouvert  $\mathcal{M}_I(\theta) \subset \mathcal{M}$  qui paramètre les représentations de  $(Q, I)$  qui appartient à la sous-catégorie  $\mathcal{P}(I) \subset \text{mod}(Q, I)$ .

*Démonstration.* Comme  $\mathcal{M} = \bigsqcup_{d \in N^\oplus} \mathcal{M}_d$ , il suffit démontrer le résultat pour  $\mathcal{M}_d$  quelconque. Soit  $E \in \text{mod}(Q, I)_d$  et  $\{E_i\}_{0 \leq i \leq m}$  sa filtration de H-N. Alors,  $E$  est dans  $\mathcal{P}(I)$  ssi  $\phi(E_1)$  et  $\phi(E/E_{m-1})$  son dans  $I$ . D'après la preuve du théorème 3.1 et la remarque 3.5, ceci est équivalent à ce que  $E$  ne possède pas de sous-modules  $A$  tel que  $\phi(A) > x$  pour tout  $x \in I$ , ni de sous-modules  $B$  tels que  $\phi(E/B) < x$  pour tout  $x \in I$ . Comme on a déjà remarqué avant, il n'y a qu'un nombre fini de vecteurs de dimension  $n \in N^\oplus$  qui correspondent à des sous-modules des objets dans  $\text{mod}(Q, I)_d$ . On pose  $P \subset N^\oplus$  l'ensemble de vecteurs de dimension  $n$  de sous-modules des objets dans  $\text{mod}(Q, I)_d$  tels que  $\phi(n) > I$  et  $S$  l'ensemble de tels vecteurs de dimension  $n$  tels que  $\phi(n) < I$ . On écrit aussi  $a_1^{-1}(\bigsqcup_{n \in P} \mathcal{M}_n) = \mathcal{M}^{(2)} \times_{\mathcal{M}, a_1}(\bigsqcup_{n \in P} \mathcal{M}_n)$  et  $a_3^{-1}(\bigsqcup_{m \in S} \mathcal{M}_m) = \mathcal{M}^{(2)} \times_{\mathcal{M}, a_3}(\bigsqcup_{m \in S} \mathcal{M}_m)$ , qui correspondent à des sous-champs fermés de  $\mathcal{M}^{(2)}$ . Comme  $a_2$  est propre, on déduit que

$$\mathcal{X} = a_2 \left( a_1^{-1} \left( \bigsqcup_{n \in P} \mathcal{M}_n \right) \cup a_3^{-1} \left( \bigsqcup_{m \in S} \mathcal{M}_m \right) \right) \cap \mathcal{M}_d$$

est un sous-champ fermé de  $\mathcal{M}_d$ . Donc,  $\mathcal{M}_I(\theta)_d = \mathcal{M}_d \setminus \mathcal{X}$  est bien un sous-champ ouvert de  $\mathcal{M}_d$ .  $\square$

*Remarque 3.6.* Notons que pour tout  $d \in N$  on a

$$\mathcal{M}_I(\theta) \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_d \simeq \mathcal{M}_I(\theta)_d \hookrightarrow \mathcal{M}_d,$$

qui est de type fini car  $\mathcal{M}_d$  l'est. Comme la représentation nulle appartient à la sous-catégorie  $\mathcal{P}(I)$  pour tout intervalle  $I \subset ]0, 1[$  alors  $\mathcal{M}_I(\theta) \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_0 \simeq \mathcal{M}_0$ . On en déduit que le sous-champ  $\mathcal{M}_I(\theta)$  définit un élément dans  $[\mathcal{M}_0 \hookrightarrow \mathcal{M}] + \hat{\mathfrak{g}}_{\text{Hall}} \simeq \hat{G}_{\text{Hall}}$ , qu'on note

$$1_I(\theta) = [\mathcal{M}_I(\theta) \hookrightarrow \mathcal{M}].$$

Un cas particulier est quand  $I = \{1/2\}$ , dans ce cas on écrit

$$1_{\text{ss}}(\theta) = [\mathcal{M}_{\text{ss}}(\theta) \hookrightarrow \mathcal{M}] \in \hat{G}_{\text{Hall}}.$$

Pour le cas de l'intervalle  $I = ]0, 1[$ , on utilise la notation

$$1_{\text{mod}(Q, I)} = 1_{]0, 1[} = [\mathcal{M} \xrightarrow{\text{Id}} \mathcal{M}]$$

**Proposition 3.6.** [2, Proposition 6.4] Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$  et  $I \subset ]0, 1[$  un intervalle tel qu'il existe des intervalles disjoints  $I_1, I_2$  qui satisfont  $I = I_1 \sqcup I_2$ . Supposons aussi que  $t_1 > t_2$  pour tout  $t_i \in I_i$   $i = 1, 2$ , alors

$$1_I(\theta) = 1_{I_1}(\theta) * 1_{I_2}(\theta) \in \hat{G}_{\text{Hall}}.$$

*Démonstration.* On démontrera plutôt que, dans  $\hat{H}(Q, I)$ , on a l'identité

$$1_I(\theta) = \prod_{\phi \in I} 1_{\phi}(\theta), \quad (3.1)$$

où le produit est pris en ordre descendant. Pour ce faire, on remarque que dans  $H(Q, I)_{\leq k}$  le produit 3.1 n'a qu'un nombre fini des  $1_{\phi}(\theta)$  différents de  $1 = [\mathcal{M}_0 \hookrightarrow \mathcal{M}]$ . En effet, pour  $k \geq 1$  fixe, il n'existe qu'un nombre fini des  $\phi_1 > \dots > \phi_r$  pour lesquels il existe un objet  $Z_{\theta}$ -semistable non-nul dans  $\text{mod}(Q, I)_d$  de phase  $\phi_i$  (il n'a qu'un nombre fini de vecteurs de dimension  $n \in N^+$  qui correspond à des sous-modules des objets dans  $\text{mod}(Q, I)_d$ ). Dans [3, Lemme 4.4] on voit que prendre le produit de  $r$  éléments dans l'algèbre de Hall est équivalent à prendre leur convolution par le champ  $\mathcal{M}^{(r)}$  des suites de  $r$ -représentations

$$0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_{r-1} \subset \mathcal{E}_r = \mathcal{E},$$

c'est-à-dire  $1_{\phi_1}(\theta) * \dots * 1_{\phi_r}(\theta) = [\mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}]$  correspondant au diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{N} & \longrightarrow & \mathcal{M}^{(r)} \xrightarrow{a_r} \mathcal{M} \\ \mathcal{g} \downarrow & & \downarrow (\alpha_j)_{1 \leq j \leq r} \\ 1_{\phi_1}(\theta) \times_{\mathbb{C}} \dots \times_{\mathbb{C}} 1_{\phi_r}(\theta) & \longrightarrow & \mathcal{M}^r, \end{array}$$

où  $\alpha_j$  envoie un objet  $(\mathcal{E}_i)_{0 \leq i \leq r}$  vers  $\mathcal{E}_j / \mathcal{E}_{j-1}$  et  $a_r$  l'envoie vers  $\mathcal{E}_r$ . On voit que les  $\mathbb{C}$ -points de  $\mathbb{N}$  correspondent à des objets  $(E_i)_{1 \leq i \leq k}$  dans  $\text{mod}(Q, I)$  tels que  $\mathcal{E}_i$  est  $Z_{\theta}$ -semistable de phase  $\phi_r$ . Ainsi, le morphisme de champs

$$\mathcal{N} \cap a_r^{-1}(\mathcal{M}_k) \xrightarrow{a_r} \mathcal{M}_I(\theta) \cap \mathcal{M}_k$$

induit une équivalence de  $\mathbb{C}$ -points grâce à l'unicité de la filtration de H-N, ce qui implique le résultat.  $\square$

### 3.2.1 Lien avec les diagrammes de diffusion

Le résultat qui suit établit le lien entre les conditions de stabilité à la King et les diagrammes de diffusion de GHKK et est le résultat central de ce mémoire.

**Théorème 3.2.** [2, Théorème 6.5] Il existe un  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\text{Hall}}$ -éventail cohérent  $\mathfrak{D}$  dans  $M_{\mathbb{R}}$  avec les propriétés suivantes :

- i) Le support est formé des éléments  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$  pour lesquels il existe une représentation non nulle dans  $\text{mod}(Q, I)$  qui est  $\theta$ -semistable.
- ii) Pour tout  $\theta \in \mathfrak{d} \subset \text{supp}(\mathfrak{D})$  on a que

$$\Phi_{\mathfrak{D}}(\mathfrak{d}) = 1_{ss}(\theta) \in \widehat{G}_{\text{Hall}}.$$

*Démonstration.* D'après la proposition 3.6, on sait que pour tout  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$  on a la relation

$$1_{\text{mod}(Q, I)} = 1_{]1/2, 1[}(\theta) * 1_{ss}(\theta) * 1_{]0, 1/2[}(\theta).$$

Soit  $k \geq 1$  fixe et considérons l'algèbre de Lie nilpotente  $\mathfrak{g}_{\leq k} = \mathfrak{g}_{\text{Hall}, \leq k}$  avec son groupe de Lie  $G_{\leq k}$  associé. En utilisant la notation de la section 3.1, on a que pour tout  $\phi \in ]0, 1[$ ,  $1_{\phi}(\theta) \in 1 + \widehat{\mathfrak{g}}_{\text{Hall}} \simeq \widehat{G}_{\text{Hall}}$  et

$$\pi_k(1_{\phi}(\theta)) \in \begin{cases} G_{+, \leq k}(\theta) & \text{si } \phi > 1/2 \\ G_{0, \leq k}(\theta) & \text{si } \phi = 1/2 \\ G_{-, \leq k}(\theta) & \text{si } \phi < 1/2. \end{cases}$$

On en déduit que  $\Pi_0^{\theta}(1_{\text{mod}(Q, I)}) = 1_{1/2}(\theta) = 1_{ss}(\theta)$ . La proposition 3.2 nous dit que le  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\text{Hall}}$ -éventail  $\mathfrak{D}(1_{\text{mod}(Q, I)})$  est cohérent, et ce qui précède démontre qu'il satisfait ii). Pour nous assurer d'avoir i), il suffit de se restreindre au sous-éventails  $\mathfrak{D}_{\leq k}$  obtenus dans le lemme 3.3.  $\square$

### 3.3 Représentations encadrées et fonctions theta

Le but des sections suivantes est montrer que l'algèbre de Hall motivique contient plus d'informations que celles associées au  $\widehat{\mathfrak{g}}_{\text{Hall}}$ -éventail défini dans le théorème 3.2. Pour cela, on fait un résumé des sections 8, 9 et 10 de [2]. Les résultats de cette section seront énoncés sans démonstration.

Considérons encore un carquois à relations  $(Q, I)$ . On peut associer à chaque sommet  $i \in Q_0$  un module projective

$$P_i = e_i \cdot (\mathbb{C}Q/I),$$

où  $e_i$  est l'élément idempotent de  $\mathbb{C}Q/I$  associé au sommet  $i$ . Pour tout  $m \in M^{\oplus}$  il existe un module projectif de type fini

$$P(m) = \bigoplus_{i \in Q_0} P_i^{m(n_i)},$$

avec  $\{n_i\}_{i \in Q_0}$  la base de  $N$  choisit dans la section 2.1.

Soit  $P$  un module projectif de la forme  $P = P(m)$  pour certain  $m \in M^{\oplus}$ . On considère la catégorie  $\text{rep}_P(Q, I)$  de représentations P-encadrées. Ses objets sont des représentations  $E \in \text{rep}(Q, I)$  munis d'un morphisme  $\eta : P \rightarrow E$ . Un morphisme entre deux tels représentations  $\eta : P \rightarrow E$  et  $\eta' : P \rightarrow E'$  est un morphisme de représentations  $f : E \rightarrow E'$  tel que  $f \circ \eta = \eta'$ .

On peut donner une autre description de la catégorie  $\text{rep}_P(Q, I)$ , qui nous permettra de lui associer un champ plus facilement. Considérons le carquois étendu  $Q(m) = (Q_0(m), Q_1(m), s(m), t(m))$  où

$$Q_0(m) = Q_0 \cup \{\star\} \text{ et } Q_1(m) = Q_1 \cup \{\alpha_{i,j}\}_{i \in Q_0, 1 \leq j \leq m(n_i)},$$

en posant  $s(m)(\alpha_{i,j}) = \star$  et  $t(m)(\alpha_{i,j}) = i$ . C'est-à-dire,  $Q(m)$  est le résultat d'ajouter le sommet  $\star$  et  $m(n_i)$  flèches de  $\star$  vers le sommet  $i$ . On définit aussi un idéal  $I(m) \subset \mathbb{C}Q(m)$  engendré par les relations dans  $I$ . On pose

$$\text{rep}(Q(m), I(m))_1 \subset \text{rep}(Q(m), I(m))$$

la sous-catégorie dont les objets sont des représentations tel que l'espace vectoriel associé au sommet  $\star$  soit  $\mathbb{C}$ . Ses morphismes se sont des morphismes de représentations tel que le morphisme correspondant à  $\star$  soit  $\text{Id} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ .

**Lemme 3.5.** [2, Lemme 8.1] *Il existe une équivalence de catégories*

$$\text{rep}_P(Q, I) \simeq \text{rep}(Q(m), I(m))_1.$$

*En particulier, les classes d'isomorphisme des représentations dans  $\text{rep}_P(Q, I)$  sont en bijection avec les classes d'isomorphisme de représentations de  $\text{rep}(Q(m), I(m))$  qui ont un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension 1 associé au sommet  $\star$ .*

Fixons  $m \in M^\oplus$  et considérons  $(Q(m), I(m))$  le carquois étendu associé. On écrit

$$N^\star = \mathbb{Z}^{Q_0(m)} = \mathbb{Z}^{Q_0 \oplus \mathbb{Z} = N \oplus \mathbb{Z}} \text{ et } M^\star = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(N^\star, \mathbb{Z}) = M \oplus \mathbb{Z}.$$

Pour tout vecteur de dimension  $d \in N$  on définit  $d^\star = (d, 1) \in N^\star$ . Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$  et  $d \in N$ , il existe un unique  $\theta^\star \in M_{\mathbb{R}}^{\text{star}}$  tel que  $\theta^\star(d^\star) = 0$ , il s'agit de

$$\theta^\star = (\theta, -\theta(d)) \in M_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}.$$

Soit  $d \in N$  un vecteur de dimension fixe. Rappelons que la définition 3.7 est la traduction fait par A.D King de la notion de points stables de la variété des représentations  $\text{rep}(Q, I)_d$  sous l'action du groupe  $GL_d(\mathbb{C})$  issue de la théorie des invariants géométriques ([11, Proposition 3.1]). Plus précisément, si  $\theta \in M$ , il existe variété projective  $M^{\text{ss}}(d, \theta)$  dont les points correspondent à des représentations semistables à facteurs de décomposition ([11, Proposition 3.2]). Les propositions suivantes sont issus du fameux article de A.D. King et seront utilisées dans la suite.

**Proposition 3.7.** [11, Proposition 5.2] *Soit  $d \in N$  un vecteur de dimension et  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ .  $M^{\text{ss}}(d, \theta)$  est un espace de modules grossier de familles de  $\theta$ -semistable représentations de  $(Q, I)$  de vecteur de dimension  $d$ , à facteurs de décomposition près (vus comme des objets dans  $\text{mod}(Q, I)_\theta$ ).*

On a écrit cette proposition dans la terminologie de King, mais ce qu'il démontre précisément c'est que pour tout schéma  $T$  et  $(\mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{M}(T)$  tel que pour tout  $\mathbb{C}$ -point  $t$  de  $T$  on ait que  $\mathcal{E}_t$  soit  $\theta$ -semistable et de dimension  $d$ , alors l'application  $T \rightarrow MM^{\text{ss}}(d, \theta)$  qui envoi  $\mathcal{E}_t$  a son classe d'équivalence dans  $MM^{\text{ss}}(d, \theta)$  est algébrique.

D'autre part,  $M^{\text{ss}}(d, \theta)$  contient un sous-ensemble  $M^s(d, \theta)$ , dont les points correspondent à des classes d'isomorphisme de représentations  $\theta$ -stables.

**Proposition 3.8.** [11, Proposition 5.3] Si  $d \in N$  est un vecteur indivisible, c'est-à-dire, ses le plus grand diviseur commun à tous ses coordonnées est 1, alors  $M(d, \theta)$  est un espace de modules fin pour les familles de  $\theta$ -stable représentations de  $(Q, I)$  de vecteur de dimension  $d$ .

**Lemme 3.6.** [2, Lemme 8.2] Le espace de module  $M^{ss}(d^*, \theta^*)$  est fin si  $\theta \in M_{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{W}_{\leq k}$  et  $k = \delta(d)$  est la dimension totale de  $d$ .

*Remarque 3.7.* L'espace de modules  $M^{ss}(d^*, \theta^*)$  est constant quand  $\theta$  varie dans les composantes connexes de  $M_{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{W}_{\leq k}$ .

Ceci nous permet d'écrire pour n'importe quel point  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ ,  $d \in N$  et  $m \in M^{\oplus}$

$$F(d, m, \theta) = M^{ss}(d^*, (\theta - \epsilon\delta)^*), \quad 0 < \epsilon \ll 1,$$

où le facteur  $\epsilon\delta$  nous garantit que  $(\theta - \epsilon\delta)$  soit pas dans  $\mathcal{W}_{\leq k}$ , car  $\delta = (1, \dots, 1)$  n'admet pas de représentations non-nulles semistables. En fin, on pose

$$F(m, \theta) = \bigsqcup_{d \in N^{\oplus}} F(d, m, \theta).$$

Il existe un morphisme  $r : F(m, \theta) \rightarrow \mathcal{M}$  qui envoie une représentation  $\theta^*$ -semistable de  $(Q(m), I(m))$  à la représentation de  $(Q, I)$  obtenue par restriction. Il se trouve que  $F(m, d)$  peut être interprété comme un schéma qui paramètre les représentations  $P$ -encadrées de certain type, liées aux éléments  $1_I(\theta)$  étudiés dans la section précédente.

**Lemme 3.7.** [2, Lemme 6.6] Pour tout  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$  il existe une paire de torsion  $(\mathcal{T}(\theta), \mathcal{F}(\theta))$  de  $\text{mod}(Q, I)$ , c'est-à-dire, une paire des sous-catégories additives pleines de  $\text{mod}(Q, I)$  tels que

- i)  $\text{Hom}(T, F) = 0$  pour tout  $T \in \mathcal{T}$  et  $F \in \mathcal{F}$ ,
- ii) pour tout  $E \in \text{mod}(Q, I)$  on ait une suite exacte

$$0 \rightarrow T \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow 0,$$

avec  $T \in \mathcal{T}$  et  $F \in \mathcal{F}$

Cette paire de torsion est donnée par :

$$\mathcal{T}(\theta) = \mathcal{P}(]1/2, 1]) = \{E \in \text{mod}(Q, I) \text{ tels que pour tout épimorphisme } E \rightarrow Q, \theta(Q) > 0\},$$

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{P}(]0, 1/2]) = \{E \in \text{mod}(Q, I) \text{ tels que pour tout monomorphisme } A \hookrightarrow E, \theta(A) \leq 0\}.$$

*Remarque 3.8.* Si on se restreint aux représentations de dimension totale  $\leq k$ , on a que les catégories  $(\mathcal{T}(\theta), \mathcal{F}(\theta))$  sont constantes sur les composantes connexes de  $M_{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{W}_{\leq k}$ . En particulier, elles restent constantes quand on bouge dans la direction  $-\delta$ . On écrit

$$1_{\mathcal{T}}(\theta) = 1_{]1/2, 1[}(\theta), \quad 1_{\mathcal{F}}(\theta) = 1_{]0, 1/2]}(\theta) \in \hat{G}_{\text{Hall}}.$$

**Lemme 3.8.** [2, Lemme 8.3] Soit  $m \in M^{\oplus}$ . Une représentation  $P$ -encadrée  $\eta : P \rightarrow E$  de vecteur de dimension  $d \in N^{\oplus}$  correspond à un point de  $F(d, m, \theta)$  si

- i)  $E \in \mathcal{F}(\theta)$
- ii)  $\text{coker}(\eta) \in \mathcal{T}(\theta)$ .

### 3.3.1 Le champ de représentations encadrées

Soit  $(Q, I)$  un carquois à relations et  $m \in M^\oplus$ . On reprend  $P = P(m)$  le module projective associé. On définit le champ de représentations  $P$ -encadrées  $\mathcal{M}_P$  de la façon suivante. Soit  $T$  un  $\mathbb{C}$ -schéma via le morphisme  $T \rightarrow \mathbb{C}$ . On considère le  $\mathcal{O}_T$ -module

$$P_T = P \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_T,$$

résultat de prendre l'image inverse de  $P$  sur le morphisme de structure de  $T$ . On le munit de l'action induite par  $\mathbb{C}Q/I$ . Les objets de  $\mathcal{M}_P(T)$  sont des représentations  $(\mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{M}(T)$  avec un morphisme de  $\mathcal{O}_T$ -modules  $\eta : P_T \rightarrow \mathcal{E}$  qui respecte l'action de  $\mathbb{C}Q/I$ . Si  $(\mathcal{E}', \rho', \eta')$  est un autre objet dans  $\mathcal{M}_P(T)$ , un morphisme

$$(\mathcal{E}, \rho, \eta) \rightarrow (\mathcal{E}', \rho', \eta')$$

est la donné d'un isomorphisme de  $\mathcal{O}_T$ -modules  $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$  dans  $\mathcal{M}(T)$  qui en plus satisfait  $f \circ \eta = \eta'$ .

**Proposition 3.9.** *Soit  $m \in M^\oplus$  et  $P$  le  $\mathbb{C}Q/I$ -module projective associé. Le 2-foncteur  $\mathcal{M}_P : \mathbf{Sch}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbf{gpd}$  est un champs avec la topologie fpqc.*

*Démonstration.* La preuve est identique à celle du champs  $\mathcal{M}$ , il reste à voir que l'existence d'un morphisme  $P_T \rightarrow \mathcal{E}$  de  $\mathcal{O}_T$ -modules respecte le recollement.  $\square$

Il existe un morphisme de champ  $\mathcal{M}_P \rightarrow \mathcal{M}$  qui envoie tout objet  $(\mathcal{E}, \rho, \eta) \in \mathcal{M}_P(T)$  vers  $(\mathcal{E}, \rho) \in \mathcal{M}(T)$ .

**Lemme 3.9.** *[2, Lemme 9.1] Le morphisme  $q_d : \mathcal{M}_P \times_{\mathcal{M}} \mathcal{M}_d \rightarrow \mathcal{M}_d$  résultat de restreindre  $q$  à  $\mathcal{M}_d$ , est un fibré vectoriel de rang  $m(d)$  pour tout  $d \in N^\oplus$ .*

Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ . Il est naturel de se demander si on pourrait identifier le schéma  $F(m, \theta)$  à un sous-champ de  $\mathcal{M}_P$ , en s'inspirant du lemme 3.8. Une première approche serait de considérer  $\mathcal{M}_1^*$  le champs de représentations du carquois étendu  $(Q(m), I(m))$  dont le rang de la représentation associé au sommet  $\star$  est 1. La preuve du lemme 3.5 donne un morphisme de champs

$$\mathcal{M}_P \rightarrow \mathcal{M}_1^*.$$

Cependant, ceci n'est pas un isomorphisme.  $\mathcal{M}_1^*(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))$  n'est pas équivalent à  $\mathcal{M}_P(\mathrm{Spec}(\mathbb{C}))$  car la premier admet  $\mathbb{C}^*$  comme groupe d'automorphismes dans le sommet  $\star$ . En plus, on voudrait paramétrer des représentations  $P$ -encadrées  $\eta : P \rightarrow E$  tels que  $E \in \mathcal{F}(\theta)$  et  $\mathrm{coker}(\eta) \in \mathcal{T}(\theta)$ . Par contre, en travaillant avec une représentation  $\eta : P_T \rightarrow \mathcal{E}$  au-dessus d'un schéma  $T$ , rien nous garantie que le  $\mathcal{O}_T$ -module  $\mathrm{coker}(\eta)$  soit localement libre (et de type fini), et donc qu'il définit un objet dans  $\mathcal{M}(T)$ .

À fin de contourner cette difficulté, Bridgeland introduit le champ  $\mathcal{M}'_P \subset \mathcal{M}_P$ , dont les objets  $(\mathcal{E}, \rho, \eta)$  satisfont que  $\mathrm{coker}(\eta)$  soit localement libre. Ceci est bien un sous-champs, car la construction du conoyau es locale (il est construit en prenant la fibre en chaque point) et, comme on a vue quand on a démontré que  $\mathcal{M}$  est un champs, être localement libre de type fini est respecte pour la topologie fpqc.

*Remarque 3.9.*  $\mathcal{M}_P$  est un champs algébrique. En effet, on a vu que le morphisme  $q : \mathcal{M}_P \rightarrow \mathcal{M}$  est un fibré vectoriel, en particulier, il est représentable et de type fini s'on le restreint à  $\mathcal{M}_d$ . Le lemme 1.4 implique que  $\mathcal{M}_P$  est algébrique car  $\mathcal{M}$  l'est, de même pour  $\mathcal{M}'_P$ . De plus, l'inclusion  $\mathcal{M}'_P \hookrightarrow \mathcal{M}_P$  est une équivalence sur le  $\mathbb{C}$ -points, ce qui entraîne que dans  $\hat{H}(Q, I)$  on a :

$$[\mathcal{M}'_P \xrightarrow{q} \mathcal{M}] = [\mathcal{M}_P \xrightarrow{q} \mathcal{M}].$$

Le champ  $\mathcal{M}'_P$  définit aussi un autre élément de  $\hat{H}(Q, I)$  via le morphisme

$$p : \mathcal{M}'_P \rightarrow \mathcal{M}$$

qui envoie une représentation  $(\mathcal{E}, \rho, \eta)$  sur  $\text{coker}(\eta)$  muni de l'action induite de  $\mathbb{C}Q/I$ . Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ , on notera  $\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{M}_{]0,1/2[}(\theta)$  et  $\mathcal{T}(\theta) = \mathcal{M}_{]1/2,1[}(\theta)$  les sous-champs ouverts de  $\mathcal{M}$  qui paramètrent les paires de torsion décrites dans le lemme 3.7. On définit les sous-champs

$$\mathcal{M}'_P(\mathcal{F}(\theta)) = \mathcal{M}'_P \times_{\mathcal{M},q} \mathcal{F}(\theta) \text{ et } \mathcal{M}'_P(\mathcal{T}(\theta), \mathcal{F}(\theta)) = \mathcal{M}'_P(\mathcal{F}(\theta)) \times_{\mathcal{M},p} \mathcal{T}(\theta),$$

où le premier produit fibré est pris sur le morphisme  $q : \mathcal{M}'_P \rightarrow \mathcal{M}$  et le deuxième sur  $p : \mathcal{M}'_P \rightarrow \mathcal{M}$ .

**Lemme 3.10.** [2, Lemme 9.2] *Il existe un morphisme de champs*

$$\mathcal{M}'_P(\mathcal{T}(\theta), \mathcal{F}(\theta)) \rightarrow F(m, \theta)$$

*qui induit une équivalence de  $\mathbb{C}$ -points.*

On obtient en ainsi deux éléments de l'algèbre de Hall complété

$$1_{\mathcal{F}}^P(\theta) = [\mathcal{M}'_P(\mathcal{F}(\theta)) \xrightarrow{q} \mathcal{M}] \text{ et } F(m, \theta) = [F(m, \theta) \xrightarrow{r} \mathcal{M}],$$

pour tout  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$

**Lemme 3.11.** [2, Lemme 9.3] *Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ . Dans l'algèbre  $\hat{H}(Q, I)$ , on a*

$$1_{\mathcal{F}}^P(\theta) = F(m, \theta) * 1_{\mathcal{F}}(\theta).$$

**Lemme 3.12.** [2, Lemme 9.3] *Soit  $\theta \in M_{\mathbb{R}}$ . On pose  $1_{ss}^P(\theta) = [\mathcal{M}'_P \times_{\mathcal{M},q} \mathcal{M}_{ss}(\theta) \xrightarrow{q} \mathcal{M}]$  et  $F_{ss}(m, \theta) = [F(m, \theta) \times_{\mathcal{M},r} \mathcal{M}_{ss}(\theta) \xrightarrow{r} \mathcal{M}]$  des éléments de  $\hat{H}(Q, I)$ . Alors*

$$1_{ss}^P(\theta) = F_{ss}(m, \theta) * 1_{ss}(\theta).$$

*Démonstration.* Ceci se suit directement de la preuve du lemme précédent, en se restreignant aux représentations dont le vecteur de dimension est orthogonal à  $\theta$ .  $\square$



### 3.3.2 Fonctions theta

On rappelle qu'une *algèbre de Poisson* est un algèbre commutative  $A$  muni d'une application bilinéaire  $\{-, -\}$ , qu'on appelle le crochet de Poisson, qui fait de  $(A, \{-, -\})$  une algèbre de Lie et qu'en plus satisfait

$$\{ab, c\} = \{a, b\}c + a\{b, c\}.$$

On dit que  $A$  est  $N^\oplus$ -graduée si

$$A = \bigoplus_{d \in N^\oplus} A_d \text{ avec } A_{d_1} \cdot A_{d_2} \subset A_{d_1+d_2} \text{ et } \{A_{d_1}, A_{d_2}\} \subset A_{d_1+d_2}$$

pour tout  $d_1, d_2 \in N^\oplus$ . On peut ainsi prendre les mêmes constructions étudiées dans la section 2.3, en remarquant que dans ce cas, l'algèbre complétée  $\hat{A}$  est aussi un algèbre de Poisson.

**Exemple 3.2.** Si  $A$  est un algèbre associative, le commutateur  $[-, -]$  munit  $A$  d'une structure d'algèbre de Poisson. En effet, si  $a, b, c \in A$

$$[ab, c] = abc - cab = (abc - acb) + (acb - cab) = a[b, c] + [a, c]b.$$

Ainsi,  $H(Q, I)$  a une structure de algèbre de Poisson  $N^\oplus$ -graduée sur  $\mathbb{C}(t)$ . On considère aussi  $\mathbb{C}[M]$  l'algèbre du groupe  $M$  dont la base se sont des monômes  $z^m$  avec  $m \in M$ . On pose  $B = H(Q, I) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[M]$ , qu'on munit d'une structure d'algèbre en étendant celle de  $H(Q, I)$  et  $\mathbb{C}[M]$  et en posant

$$a_d * z^m = t^{2m(d)}(z^m * a_d) \text{ pour tout } a_d \in H(Q, I)_d.$$

On munit  $H(Q, I)$  et  $B$  du crochet de Poisson donné par le multiple du commutateur

$$\{a, b\} = (t^2 - 1)^{-1} \cdot [a, b],$$

en particulier on a que

$$\{a_d, z^m\} = \frac{t^{2m(d)} - 1}{t^2 - 1} z^m * a_d$$

pour tout  $a_d \in H(Q, I)_d$  et  $z^m \in \mathbb{C}[M]_m$ .

Remarquons que  $(H(Q, I), [-, -])$  est isomorphe à  $A = (H(Q, I), \{-, -\})$  en tant qu'algèbre de Lie via le morphisme  $x \mapsto (t^2 - 1) \cdot x$ , et on peut identifier leurs groupes de Lie associés.

**Définition 3.9.** Soit  $\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}_{\leq k})_{k \geq 1}$  un  $\mathfrak{g}$ -éventail cohérent, où  $\mathfrak{g} = A_{>0}$ . Pour tout  $m \in M$  on définit une *fonction theta*

$$\vartheta^m : M_{\mathbb{R}} \setminus \text{supp}(\mathfrak{D}) \rightarrow \hat{B} = \hat{A} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[M]$$

en utilisant l'action du groupe  $\hat{G} \simeq \hat{G}_{\text{Hall}} \simeq 1 + \hat{\mathfrak{g}}$  et en posant

$$\vartheta^m(\theta) = \Phi_{\mathfrak{D}}(\theta_+, \theta) \cdot z^m$$

pour un  $\theta_+ \in M_{\mathbb{R}}^+$  arbitraire.

**Théorème 3.3.** [2, Théorème 10.1] Soit  $\mathfrak{D}$  le diagramme de diffusion de Hall du théorème 3.2 et soit  $m \in M^\oplus$ . Alors la fonction theta associée à  $m$  satisfait

$$\vartheta^m(\theta) = z^m \cdot F(m, \theta) \in \hat{B}$$

pour tout  $\theta \in M_{\mathbb{R}} \setminus \text{supp}(\mathfrak{D})$ .

# Chapitre 4

## Algèbres quantiques

Pour l'instant, on s'est concentrée sur les représentations d'un carquois  $(Q, I)$  sur  $\mathbb{C}$ , et on a eu besoin du champ  $\mathcal{M}$  pour réussir à munir les  $\mathbb{C}$ -représentations de  $(Q, I)$  d'une structure de  $\mathbb{C}(t)$ -algèbre. Il se trouve que le cas d'un corps fini a déjà été étudié dans les années 1990 par Ringel, qui l'a utilisé pour créer une description de l'algèbre quantique associée à un diagramme de Dynkin via les représentations issues du carquois associé. Dans ce court chapitre, on évoque ces idées à nouveau, et on remarque que l'algèbre  $\hat{H}(Q, I)$  fonctionne comme une généralisation de l'algèbre de Hall étudiée, par exemple, dans [12].

Pour la suite, on suppose que  $Q$  est un diagramme de Dynkin et que  $I = 0$ . On fixe aussi un corps  $\mathbb{k}$  fini et de cardinalité  $q_{\mathbb{k}} = |\mathbb{k}|$ .

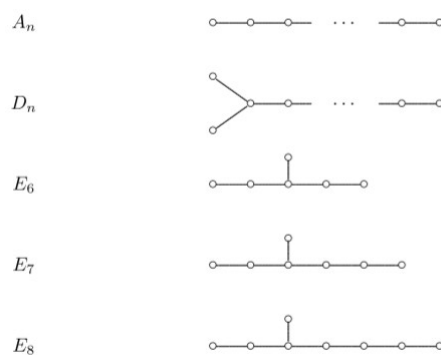


FIGURE 4.1 – Liste de diagrammes de Dynkin, prise de [12].

### 4.1 L'algèbre $U_q(\mathfrak{n}_+(\Delta))$

Soit  $A' = \mathbb{Q}(t)$  le corps de fonctions rationnelles sur  $\mathbb{Q}$  et  $A = \mathbb{Z}[t, t^{-1}] \subset \mathbb{Q}(t)$ . On pose  $q = t^2$  et on définit

$$\begin{aligned}
[n] &= \frac{t^n - t^{-n}}{t - t^{-1}} = t^{n-1} + t^{n-3} + \dots + t^{-n+1}, \\
[n]! &= \prod_{m=1}^n [m], \\
\left[ \frac{n}{m} \right] &= \frac{[n]!}{[m]![n-m]!}
\end{aligned}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq m \leq n$ .

**Définition 4.1.** Soit  $\Delta = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{Z})$  une matrice  $n \times n$ . On dit que  $\Delta$  est une *matrice de Cartan généralisée* si  $a_{ii} = 2$  et  $a_{ij} \in \{0, -1\}$  pour tout  $i \neq j$ .

Une matrice de Cartan  $\Delta$  définit un graphe avec  $n$  sommets et arêtes

$$i - j$$

si  $a_{ij} = -1$ . Une telle matrice définit aussi une  $A'$ -algèbre  $U'_q(\mathfrak{n}_+(\Delta))$  de générateurs  $\{E_i\}_{1 \leq i \leq n}$  soumis aux relations

$$E_i E_j - E_j E_i = 0 \quad \text{si } a_{ij} = 0 \quad (4.1)$$

$$E_i^2 E_j - (t + t^{-1}) E_i E_j E_i + E_j E_i^2 = 0 \quad \text{si } a_{ij} = -1. \quad (4.2)$$

On définit aussi  $U_q(\mathfrak{n}_+(\Delta))$  la  $A$ -sous-algèbre de  $U'_q(\mathfrak{n}_+(\Delta))$  engendrée par les éléments  $E_i^{(m)} = \frac{E_i^m}{[m]!}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$  et  $m \geq 1$ . Comme avant, on considère  $N \simeq \mathbb{Z}^n$  avec la base  $\{n_i\}_{1 \leq i \leq n}$ . Les algèbres  $U'_q(\mathfrak{n}_+(\Delta))$  et  $U_q(\mathfrak{n}_+(\Delta))$  sont  $N$ -graduées si on assigne le degré  $n_i$  à l'élément  $E_i$  pour tout  $i$ .

## 4.2 L'algèbre $\mathcal{H}_{\mathbb{k}}(Q)$

Soit  $Q$  un carquois fini. On note  $\mathbb{k}Q$  la  $\mathbb{k}$ -algèbre de chemins sur  $Q$ . Pour chaque sommet  $i \in Q_0$ , on a une représentation  $S_i$  qui associe au sommet  $i$  un  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel de dimension 1 et 0 aux autres. Remarquons que le nombre de flèches  $i \rightarrow j$  est le même que la dimension d'espace d'extensions  $\text{Ext}^1(S_i, S_j)$  pour tout  $i, j \in Q_0$ . En particulier, comme  $\mathbb{k}$  est fini, on n'a qu'un nombre fini de classes d'équivalence de suites exactes  $0 \rightarrow S_j \rightarrow E \rightarrow S_i \rightarrow 0$ .

**Définition 4.2.** Soit  $R$  un anneau, on dit que un  $R$ -module est *fini* si sa cardinalité est  $< \infty$ . En particulier, pour des algèbres de type fini sur un corps fini, un  $R$ -module de type fini est fini.

Si  $N_1, N_2$  et  $M$  sont des modules finis, on pose  $\mathcal{F}_{N_1, N_2}^M$  l'ensemble des suites exactes

$$0 \rightarrow N_2 \rightarrow M \rightarrow N_1 \rightarrow 0$$

dont la cardinalité est notée  $F_{N_1, N_2}^M$ , qui est fini car  $\mathbb{k}$  est un corps fini. On définit une structure d'anneau sur  $\mathcal{K}(\text{mod}(Q))$  avec la multiplication

$$[N_1] * [N_2] = \sum_{[M] \in \mathcal{K}(\text{mod}(Q))} F_{N_1, N_2}^M [M].$$

**Proposition 4.1.** [12, Proposition, page 9] Soit  $\mathcal{H}_{\mathbb{k}}(Q) = (\mathcal{K}(\text{mod}(Q)), *)$ . Alors  $\mathcal{H}_{\mathbb{k}}(Q)$  est un anneau associatif avec unité. En plus, si  $\mathcal{H}_{\mathbb{k}}(Q)_d$  est le groupe abélien dont les éléments sont des représentations de vecteur de dimension  $d \in \mathbb{Z}^n = N$ , alors  $\mathcal{H}_{\mathbb{k}}(Q) = \bigoplus_{d \in N} \mathcal{H}_{\mathbb{k}}(Q)_d$  est  $N$ -graduée.

Il existe aussi une  $\mathbb{Z}[q]$ -algèbre  $\mathcal{H}(Q)$  associé à  $Q$  donnée par l'information du système de racines positives de l'algèbre de Lie associé à  $Q$ . En fait

$$\mathcal{H}_{\mathbb{k}}(Q) \simeq \mathcal{H}(Q) / \langle q - q_{\mathbb{k}} \rangle,$$

et on a le théorème suivant :

**Théorème 4.1.** [12, page 8] Soit  $Q$  le carquois associé à une matrice de Cartan  $\Delta$  tel que  $Q$  soit de type Dynkin. Considérons  $\mathcal{H}_*(Q) = \mathcal{H}(Q) \otimes_{\mathbb{Z}[q]} \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  muni de la multiplication

$$[N_1] \diamond [N_2] = t^{\langle \dim(N_1), \dim(N_2) \rangle} [N_1] * [N_2].$$

Alors l'application

$$\eta : U_q(\mathfrak{n}_+(\Delta)) \rightarrow \mathcal{H}_*(Q)$$

définie par  $\eta(E_i) = [S_i]$  où  $S_i$  correspond au module simple associé au sommet  $i \in Q_0$ , est un isomorphisme.

Le fait que  $Q$  soit du type Dynkin est crucial, et on a besoin de plus d'antécédents sur les systèmes de racines. Cependant, une partie de la preuve se déduit du fait que les éléments  $[S_i]$  associés aux modules simples  $S_i$   $i \in Q_0$  satisfont aux relations (4.1) et (4.2) pour le produit  $\diamond$ , fait qui repose sur le lemme suivant :

**Lemme 4.1.** [12, Lemme, page 13] Soient  $S_i$  et  $S_j$  des  $\mathbb{k}Q$ -modules simples associés aux sommets  $i, j \in Q_0$ . On a les relations suivantes dans  $\mathcal{H}_{\mathbb{k}}(Q)$  :

- i)  $[S_i] * [S_j] = [S_j] * [S_i]$  si il n'y a pas de flèche entre  $i$  et  $j$ .
- ii) S'il existe une flèche  $i \rightarrow j$  alors

$$[S_i]^{*2} * [S_j] - (q_{\mathbb{k}} + 1)[S_i] * [S_j] * [S_i] + q_{\mathbb{k}}[S_j] * [S_i]^{*2} = 0$$

et

$$[S_i] * [S_j]^{*2} - (q_{\mathbb{k}} + 1)[S_i] * [S_j] * [S_i] + q_{\mathbb{k}}[S_j]^{*2} * [S_i] = 0.$$

Le produit  $*$  défini pour la version motivique  $H(Q)$  fonctionne comme une généralisations au cas où  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ . On a un énoncé équivalent à celui du lemme 4.1.

**Proposition 4.2.** Soit  $Q$  un carquois de type Dynkin et considérons  $H(Q)$  son algèbre de Hall motivique. Soit  $\mathcal{M}_i$  et  $\mathcal{M}_j$  les champs associés aux vecteurs de dimension des modules simples des sommets  $i, j \in Q_0$ . On a les relations suivantes dans  $H(Q)$  :

- i)  $[\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_j \hookrightarrow \mathcal{M}] = [\mathcal{M}_j \hookrightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}]$  si il n'a pas de flèche entre  $i$  et  $j$ .
- ii) S'il existe une flèche  $i \rightarrow j$  alors

$$\begin{aligned} & [\mathcal{M}_j \hookrightarrow \mathcal{M}]^{*2} * [\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}] - (\ell + 1)[\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_j \hookrightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}] \\ & + \ell[\mathcal{M}_j \hookrightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}]^{*2} = 0 \end{aligned}$$

et

$$[\mathcal{M}_j \hookrightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}]^{*2} - (\ell + 1)[\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_j \hookrightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}] \\ + \ell[\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}]^{*2} * [\mathcal{M}_j \hookrightarrow \mathcal{M}] = 0,$$

où  $\ell = t^2 = [\mathbb{A}^1]$ .

*Démonstration.* Soit  $d \in N^\oplus$  un vecteur de dimension et  $T$  un  $\mathbb{C}$ -schéma. Un objet dans  $\mathcal{M}_d$  est équivalent à la donnée d'une ensemble de  $\mathcal{O}_T$ -modules  $\mathcal{E} = \{\mathcal{E}_i\}_{i \in Q}$  localement libres de dimension  $d_i$  respectivement, munis des morphismes  $\varphi_{i \rightarrow j} : \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E}_j$  de  $\mathcal{O}_T$ -modules s'il existe une flèche  $i \rightarrow j$ . Un morphisme  $\{f_i\}_{i \in Q}$  dans  $\mathcal{M}_d$  respecte les morphismes  $\varphi_{i \rightarrow j}$ . En particulier,  $\mathcal{M}_i(T)$  associé au sommet  $i$  le groupoïde de faisceaux inversibles de  $T$ , c'est-à-dire, les  $\mathcal{O}_T$ -modules localement libres de rang 1. S'il n'existe pas de flèche entre  $i$  et  $j$ , toute suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{M}(T)$  avec  $\mathcal{E} \in \mathcal{M}_i(T)$  et  $\mathcal{F} \in \mathcal{M}_j(T)$  est scindée, ce qui nous donne i).

Pour ii), on commence par calculer  $[\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}]^{*2} = [\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{M}]$ . Un objet dans  $\mathcal{Z}(T)$  est la donnée d'une suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0$  de  $\mathcal{O}_T$ -modules localement libres de rang fini, tels que  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  soient inversibles. Ceci est équivalent à la donnée d'un  $\mathcal{O}_T$ -module  $\mathcal{H}$  localement libre de rang 2, muni d'un sous- $\mathcal{O}_T$ -module inversible. On en déduit que le morphisme de champs  $\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{M}_{2i}$  qui associe à une suite exacte son deuxième terme est une fibration de Zariski de fibre  $\mathbb{P}^1$ , et dans  $H(Q, I)$  on a l'égalité

$$[\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}]^{*2} = [\mathbb{P}^1][\mathcal{M}_{2i} \hookrightarrow \mathcal{M}] = (\ell + 1)[\mathcal{M}_{2i} \hookrightarrow \mathcal{M}].$$

Pour simplifier la notation, on dénote  $\mathcal{X} * \mathcal{Y}$  le champ algébrique tel que  $[\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}] = [\mathcal{X} * \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{M}]$ . Supposons qu'il existe une flèche  $i \rightarrow j$ , alors

$$[\mathcal{M}_j \rightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_{2i} \rightarrow \mathcal{M}] = [\mathcal{M}_{2i+j} \rightarrow \mathcal{M}].$$

En effet, au dessus de  $T$  les objets de  $\mathcal{M}_{2i+j}$  se sont des diagrammes

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_i \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}_j$$

tel que  $\mathcal{E}_i$  soit un  $\mathcal{O}_T$ -module localement libre de rang 2 et  $\mathcal{E}_j$  soit inversible. On a toujours le diagramme commutative

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_i & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E}_j \\ \uparrow & & \uparrow \text{Id}_{\mathcal{E}_j} \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{E}_j, \end{array}$$

qui induit une suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{E}_i \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}_j$  dans  $\mathcal{M}_j * \mathcal{M}_{2i}$ . Le même raisonnement nous dit que  $\mathcal{M}_{2i} * \mathcal{M}_j$  est équivalent au champ  $\mathcal{M}_{2i} \times \mathcal{M}_j$  qui est équivalent au sous-champ fermé  $\mathcal{M}_{2i+j}^0$  de  $\mathcal{M}_{2i+j}$  dont les objets satisfont que  $\varphi = 0$ . De même  $\mathcal{M}_j * \mathcal{M}_i \simeq \mathcal{M}_{i+j}$ , il reste à calculer  $\mathcal{M}_i * \mathcal{M}_{i+j}$ . Au dessus de  $T$ , ses objets sont équivalents aux diagrammes commutatifs de la forme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}_i & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{E}_j \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

avec  $\mathcal{E}_i \xrightarrow{\varphi} \mathcal{E}_j \in \mathcal{M}_{2i+j}$  et  $\mathcal{F}$  un  $\mathcal{O}_T$ -sous-module inversible de  $\mathcal{E}_i$ . Si  $\varphi = 0$ , ceci est équivalent à prendre n'importe quel  $\mathcal{O}_T$ -sous-module de  $\mathcal{E}_i$  inversible. Sinon,  $\mathcal{F}$  est isomorphe au noyau de  $\varphi$ . Ceci implique que le morphisme  $\mathcal{M}_i * \mathcal{M}_{i+j} \rightarrow \mathcal{M}_{2i+j}$  est une fibration de Zariski de fibre  $[\mathbb{P}^1]$  au-dessus de  $\mathcal{M}_{2i+j}^0$  et un isomorphisme sur son complément  $\mathcal{M}_{2i+j}^{\neq 0}$ . On déduit que

$$\begin{aligned} [\mathcal{M}_j \hookrightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}]^{*2} &= (\ell + 1)[\mathcal{M}_{2i+j}^0 \hookrightarrow \mathcal{M}] + (\ell + 1)[\mathcal{M}_{2i+j}^{\neq 0} \hookrightarrow \mathcal{M}] \\ [\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_j \hookrightarrow \mathcal{M}] * [\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}] &= (\ell + 1)[\mathcal{M}_{2i+j}^0 \hookrightarrow \mathcal{M}] + [\mathcal{M}_{2i+j}^{\neq 0} \hookrightarrow \mathcal{M}] \\ [\mathcal{M}_i \hookrightarrow \mathcal{M}]^{*2} * [\mathcal{M}_j \hookrightarrow \mathcal{M}] &= (\ell + 1)[\mathcal{M}_{2i+j}^0 \hookrightarrow \mathcal{M}], \end{aligned}$$

ce qui nous donne la deuxième équation de ii). Un raisonnement similaire nous donne l'autre équation.

□

# Bibliographie

- [1] Francis Borceux and Isar Stubbe. Short introduction to enriched categories. In *Current research in operational quantum logic*, pages 167–194. Springer, 2000.
- [2] T Bridgeland. Scattering diagrams, hall algebras and stability conditions. *Algebraic Geometry*, 4(5) :523–561, 2017.
- [3] Tom Bridgeland. An introduction to motivic Hall algebras. *Advances in Mathematics*, 229(1) :102–138, 2012.
- [4] Chi-Yu Cheng. The grassmannian package. [https://sites.math.washington.edu/~chiyu/The%20Grassmannian%20Package/grassmannian\\_functor\\_representable.pdf](https://sites.math.washington.edu/~chiyu/The%20Grassmannian%20Package/grassmannian_functor_representable.pdf).
- [5] Dan Edidin. Notes on the construction of the moduli space of curves. In *Recent progress in intersection theory*, pages 85–113. Springer, 2000.
- [6] Tomas Gomez. Algebraic stacks. *arXiv preprint math/9911199*, 1999.
- [7] Mark Gross, Paul Hacking, Sean Keel, and Maxim Kontsevich. Canonical bases for cluster algebras. *Journal of the American Mathematical Society*, 31(2) :497–608, 2018.
- [8] Alexander Grothendieck. Technique de descente et théorèmes d’existence en géométrie algébrique. i. généralités. descente par morphismes fidèlement plats. *Séminaire Bourbaki*, 5 :299–327, 1959.
- [9] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*, volume 52. Springer Science & Business Media, 2013.
- [10] Dominic Joyce. Motivic invariants of Artin stacks and ‘stack functions’. *Quarterly Journal of Mathematics*, 58(3) :345–392, 2007.
- [11] Alastair D King. Moduli of representations of finite dimensional algebras. *The Quarterly Journal of Mathematics*, 45(4) :515–530, 1994.
- [12] Claus Michael Ringel. *The Hall algebra approach to quantum groups*. Sonderforschungsbereich 343, 1993.
- [13] Christoph Sorger. Lectures on moduli of principal G-bundles over algebraic curves. Technical report, 2000.
- [14] The Stacks project authors. The stacks project. <https://stacks.math.columbia.edu>, 2020.
- [15] Angelo Vistoli. Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory. *arXiv preprint math/0412512*, 2004.